

微小信号計測

目次

1	信号と雑音	2
1.1	測定装置と雑音	2
1.2	確率過程	3
1.2.1	パワースペクトル	3
1.2.2	自己相関関数と Wiener-Khintchine の定理	4
1.2.3	線形系とパワースペクトル	5
1.2.4	Langevin 方程式	6
1.3	信号雑音比と測定帯域	7
2	種々の雑音	9
2.1	熱雑音	9
2.2	散乱雑音	10
2.3	$1/f$ 雑音	11
2.4	増幅器の雑音と雑音指数	11
3	ロックインアンプと変調法	13
3.1	ロックインアンプ	13
3.2	変調法	14
3.2.1	変調と微分検出	16
4	負帰還の利用	16
4.1	負帰還とは	16
4.2	負帰還による安定化	18
4.3	負帰還系の安定性	19
5	共振現象の利用	21
5.1	共振系	21
5.2	High- Q 共振器	22
5.3	共振を利用した変位センサー	23
5.4	共振を利用した微小な力の測定法	24
6	波形処理	25
6.1	サンプリング定理	25
6.2	FFT	26
6.3	移動平均と積算平均	27
6.4	デジタルフィルター	28
6.4.1	一次ローパスフィルター	28
6.4.2	z 変換	29
6.4.3	$s-z$ 変換	29
6.4.4	非再帰型と再帰型フィルター	30
7	自作測定器	32
7.1	OP アンプ	32
7.2	超低雑音増幅器	32
7.3	位相検波器	33
8	まとめ	34

1 信号と雑音

任意の測定には必ず揺らぎが伴う。その揺らぎの成分が雑音と呼ばれるもので、本来測定すべきもの（信号）に擾乱を与える。いわゆる微小信号とは測定すべき信号の大きさが存在している雑音と同じ程度になったものをいう。従って、まず、測定時に影響を与える雑音の特性を知らなければならない。

1.1 測定装置と雑音

まず、測定装置と混入してくる雑音の種類を考えよう [1]。図 1 は典型的な測定装置を模式的に表したも

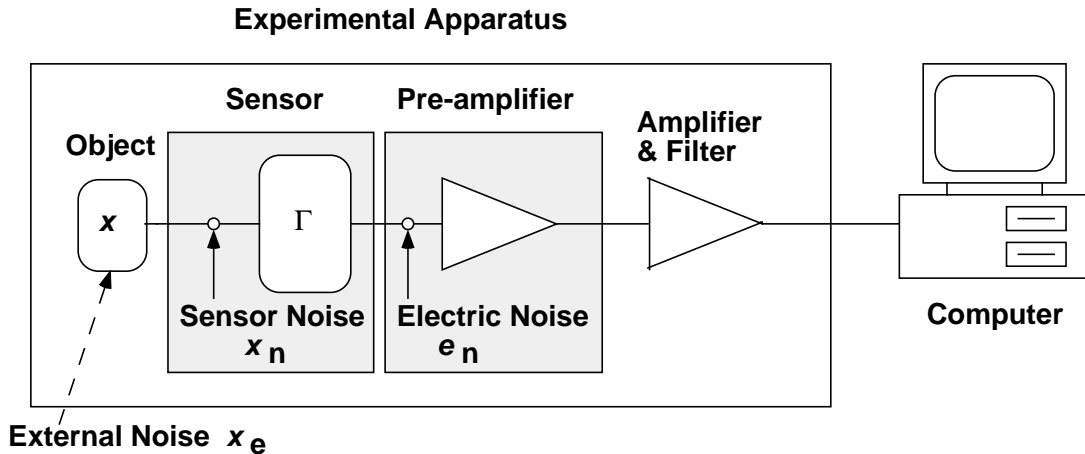


図 1: 測定装置の模式図

のである。たいていの場合は、測定すべき物理量 x はある種のセンサーによって電気信号に変換（変換係数 Γ ）され、更に増幅され、適当な信号処理を施されて記録装置（ほとんどの場合コンピューター）に送られる。そのような装置では、信号にセンサー自身の持つ雑音（ x_n ）とその後につながる増幅器の雑音（ e_n ）が付加された形で測定される¹。更に、様々な外乱（ x_e ）が測定系を乱す。これを式で書くと

$$v = G[\Gamma(x + x_n + x_e) + e_n] \quad (1)$$

となる。ここで、 G は測定器系の持つ増幅度を表している。感度の良いセンサーとは、測定すべき物理量に換算したときの雑音（等価換算雑音とか入力換算雑音と呼ばれる） x_{equ} が小さいことである。この場合は

$$x_{\text{equ}} = x_n + e_n/\Gamma \quad (2)$$

と表される²。従って、ただ Γ の大きなセンサーが良いわけではないし、増幅器の雑音 e_n だけを下げても意味がない。

また、実験装置をとりまく環境からみると雑音には

1. 外部から混入する雑音 x_e
2. 測定器自身が持つ雑音 x_n, e_n

の 2 つがあり、測定器自身の雑音は更に、

1. 原理的な雑音 x_n
2. 付加的な雑音 e_n

に分けることができる。また、揺らぎの成分は

¹本来は、これに加えて、センサー自身が測定対象に擾乱を与えることで生じる雑音（反作用雑音と呼ばれる）がある。この雑音の存在は非常に重要であるが、これを含む議論はかなり複雑になるので省略した。

²センサー自身の特性を議論する場合は、普通、外来雑音は考えない。

1. 定常的で統計的な性質が良くわかっているもの
2. 突発的に混入して再現性の乏しいもの

とに分けることもできる。

ほとんどの場合、鍵となる部分をきちんとすればきれいな信号を得ることが可能である。そして、信号は増幅されて大きな値を持つようになるため、鍵となる部分はセンサーに近い部分の入力部分である場合が多い。また、雑音のレベルは測定器の置かれる環境にも強く影響される。特に、外来雑音の場合は測定器の結線の仕方や、設置の場所や向きを変えただけで極端に変化する場合がある。しかも、感度の高いセンサーほど外来雑音にも敏感になる。残念ながら、このようなことを一般論で述べるのは不可能に近い³。

以下は一番性質のわかりやすい、定常的な雑音について述べる。センサーの持つ原理的な雑音、増幅器の雑音など、測定器の自身の持つ雑音のほとんどはこの性質を持っていると考えてよい。逆に、環境が良く整備された実験室で、上手に設計された測定装置を用いる場合は、この種の雑音が支配的になるはずである。

1.2 確率過程

雑音のように常に揺らいでいて、不規則に変動する統計事象は確率過程と呼ばれる [2, 3, 4, 5]。統計量の期待値が、時間の原点の移動に対して不変な確率過程は定常過程と呼ばれる。以下で扱う確率過程は定常過程であるとする。また、確率変数 x のアンサンブル平均（統計的期待値）を $\langle x \rangle$ 、時間平均を \bar{x} であらわすが、ここで扱う確率過程はすべて

$$\langle x \rangle = \bar{x} \quad (3)$$

であり、エルゴートプロセスと呼ばれるものである。

確率変数 x が x と $x + dx$ の間にある確率が $p(x)dx$ の時、 $p(x)$ を確率密度関数という。あきらかに

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \quad (4)$$

である。最も代表的な確率分布はガウス分布であり、正規分布とも呼ばれ、 $\langle x \rangle = 0$ とすると⁴

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5)$$

であらわされる。ここで σ^2 は x の分散であり

$$\sigma^2 = \overline{x^2(t)} \quad (6)$$

である。ガウス分布に従う雑音をガウス雑音というが、抵抗の熱雑音や増幅器の雑音等ほとんどすべての雑音がこれにあてはまる。

1.2.1 パワースペクトル

$x(t)$ に対して、その Fourier 変換 $X(\omega)$ は次の関係で結ばれている。

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (7)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (8)$$

さらに Parseval の定理により

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (9)$$

が成り立つ。しかし、一般に $x(t)$ が無限に続くときは

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \rightarrow \infty \quad (10)$$

³とはいうものの、雑音の侵入経路はかなりの確率で電源関係かアースラインの関係であろう。このような場合の対策に関しては文献 [1] に詳しく書かれている。

⁴平均値が 0 でない確率変数については平均値からのずれを考えれば良いのでこの仮定は一般的である。

となり、Fourier 変換は存在しない。そこで $x(t)$ を区間 $[-T/2, T/2]$ で切り出した関数を

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases} \quad (11)$$

と定義し、この Fourier 変換を $X_T(\omega)$ であらわす。

$$X_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (12)$$

これを用いてパワースペクトル密度 $S(\omega)$ は次のように定義される。

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle |X_T(\omega)|^2 \rangle}{2\pi T} \quad (13)$$

式 (9) を利用すると、 $x(t)$ と $S(\omega)$ には次のような関係があることがわかる⁵。

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (17)$$

つまりこの式の意味することは、パワースペクトル密度 $S(\omega)$ はランダム変動の平均パワー $x^2(t)$ の各周波数成分からの寄与を示しているということである。市販の FFT (Fast Fourier Transformation) 方式のスペクトラムアナライザは、式 (13) に従って入力からパワースペクトル密度を計算し、その結果を出力表示するものである。

なおパワースペクトル密度は単にパワースペクトルと呼ばれるのが普通である。また $S(\omega)$ は数学的取扱いには便利であるが、実用上は $\omega = 2\pi f$ とおき $f \geq 0$ に対するスペクトルを考えた方がわかりやすい。これは片側パワースペクトルと呼ばれ、それを $G(f)$ とおくと、 $S(-\omega) = S(\omega)$ であるから

$$\overline{x^2(t)} = \int_0^{\infty} G(f) df \quad (18)$$

$$G(f) = 4\pi S(\omega) \quad (19)$$

が成り立つ。さらに、パワースペクトルの具体的な数値をあげるときには、パワースペクトル $G(f)$ の平方根 $\sqrt{G(f)}$ であらわすことが多い。例えば雑音電圧の場合の $V/\sqrt{\text{Hz}}$ とか等価雑音変位の $\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$ などはこの例である。

1.2.2 自己相関関数と Wiener-Khintchine の定理

自己相関関数 $R(\tau)$ は次のように定義される。

$$R(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \quad (20)$$

$x(t)$ の定常性を考えると明らかなように $R(\tau)$ は偶関数である。また、 $\tau = 0$ において最大値をとり、

$$R(0) = \langle x^2(t) \rangle \quad (21)$$

となる。

⁵

$$\langle x^2 \rangle = \langle \overline{x^2(t)} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \langle x(t)^2 \rangle dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x_T(t)^2 \rangle dt \quad (14)$$

である。ここで、

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(\omega) e^{i\omega t} dt \quad (15)$$

と

$$\delta(\omega - \omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega')t} dt \quad (16)$$

を用いると証明できる。

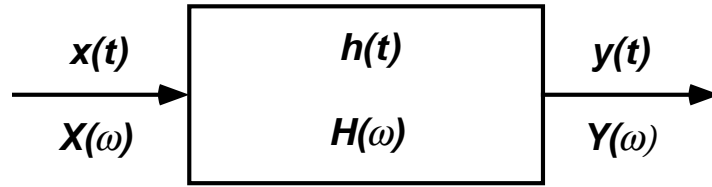


図 2: 線形系の入出力の関係

次に、Wiener-Khintchine の定理と呼ばれる、パワースペクトルと自己相関関数の関係を求める。式 (12) を式 (13) に代入することにより、

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \langle x(t)x(t') \rangle e^{-i\omega(t-t')} dt dt' \quad (22)$$

となる。次に $t - t' = \tau$ において t, t' の積分を τ の積分に変換し、式を少し変形すると

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T R(\tau) e^{-i\omega\tau} (T - |\tau|) d\tau \quad (23)$$

と書ける。ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} |\tau| d\tau \quad (24)$$

の積分が有限であると仮定すると、次のような相関関数とパワースペクトルの関係が得られる。

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (25)$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (26)$$

この関係を Wiener-Khintchine の公式という。つまり、相関関数とパワースペクトルは互いに Fourier 変換の関係にあり、一方がわかれば他方も求められる。

1.2.3 線形系とパワースペクトル

図 2 に示したシステムにおいて、入力 $x(t)$ に対して出力 $y(t)$ が 線形の演算子 \mathcal{L} によって

$$\mathcal{L}[y(t)] = x(t) \quad (27)$$

という方程式で表されるとする⁶。そして、線形系が定常な場合には、 $x(t) = e^{i\omega t}$ としたときは、 $y(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$ が解となる。すなわち、

$$\mathcal{L}[H(\omega)e^{i\omega t}] = e^{i\omega t} \quad (31)$$

が成り立つ。この $H(\omega)$ は正弦波に対する系の応答を表すので周波数応答関数と呼ばれる。

そして、 $x(t)$ の Fourier 変換 $X(\omega)$ と $y(t)$ の Fourier 変換 $Y(\omega)$ を与えるとすると、

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) \mathcal{L}[e^{i\omega t}] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y(\omega)}{H(\omega)} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (32)$$

⁶ここで、 \mathcal{L} が線形とは、

$$\mathcal{L}[y_1(t)] = x_1(t) \quad (28)$$

$$\mathcal{L}[y_2(t)] = x_2(t) \quad (29)$$

が成り立ち、 α, β を定数としたら

$$\mathcal{L}[\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)] = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \quad (30)$$

が成り立つ場合である。

が成り立つので、 $H(\omega)$ は

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (33)$$

と書ける。また、積のフーリエ変換の性質を用いると⁷

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)X(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} h(t')x(t-t')dt' \quad (35)$$

となる。この $h(t)$ は、 $x(t) = \delta(t)$ に対する出力であるところのインパルス応答で ($\mathcal{L}[h(t)] = \delta(t)$ をみ
たす)

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad (36)$$

のような関係がある⁸。そこで、式 (35) を用いて $y(t)y(t+\tau)$ のアンサンブル平均を計算すると、入力
の相関関数 $R_x(\tau)$ と出力の相関関数 $R_y(\tau)$ の間に次のような関係があることがわかる。

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)h(\eta)R_x(\tau + \xi - \eta)d\xi d\eta \quad (37)$$

さらに、この式の両辺を Fourier 変換することにより、入力のパワースペクトル $S_x(\omega)$ と出力の
パワースペクトル $S_y(\omega)$ の間に

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) \quad (38)$$

という関係が成り立つことがわかる。これより線形システムの周波数応答関数がわかれば出力の
パワースペクトルを知ることができる。

1.2.4 Langevin 方程式

上述の確率過程の振る舞いを記述する方程式は Langevin 方程式または確率微分方程式と呼ばれる。例
えば、流体中の粒子のブラウン運動は、その粒子の速度を u 、質量を m とすれば

$$m \frac{du}{dt} + m\gamma u = f_B(t) \quad (39)$$

で記述される。右辺を 0 と置いた式は通常
の速度に比例する抵抗力を受けて運動する粒子の運動方程式であるが、これに、
ブラウン運動を引き起こす力の項 $f_B(t)$ をつけ加えたものである。この力はランダムな
力（揺動力）と呼ばれ、

$$\langle f_B(t)f_B(t') \rangle = 2D\delta(t-t') \quad (40)$$

という自己相関関数を持っている確率的なものである。また、相関関数が δ 関数とい
うことは $\tau = 0$ 以外は全く相関がないことを示している。また、これからパワースペクトルを求めると

$$S_f = D/\pi \quad (41)$$

となり、すべての周波数成分を一様
に含む。このような雑音は白色雑音（White Noise）と呼ばれる。従って、
ブラウン運動は、式 (39) で表されるように、粒子が速度に比例する抵抗力を受けながら
白色雑音によって駆動されることによって生じると言うことができる。

式 (39) の定常解は形式的に

$$u(t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t f_B(t')e^{-\gamma(t-t')}dt' \quad (42)$$

と表すことができる。これを用いて自己相関関数を求めると

$$\langle u(t)u(t+\tau) \rangle = \left(\frac{1}{m}\right)^2 \int_{-\infty}^t ds' \int_{-\infty}^{t+\tau} ds \langle f_B(s)f_B(s') \rangle e^{-\gamma(t-s')}e^{-\gamma(t+\tau-s)} \quad (43)$$

7

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')y(t-t')dt' \quad (34)$$

のように、畳み込み積分で表される。

⁸両辺に \mathcal{L} を施し、 $\mathcal{L}[H(\omega)e^{i\omega t}] = e^{i\omega t}$ という関係を用いると証明できる。

を計算すればよい。今、 $\tau > 0$ として、式 (40) を用いると積分は簡単に実行できて

$$\langle u(t)u(t+\tau) \rangle = \frac{De^{-\gamma\tau}}{m^2\gamma} \quad (44)$$

となる。ところで、温度 T の熱平衡状態では

$$\frac{1}{2}m\langle u(t)^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T \quad (45)$$

が成り立つはずで、この関係と式 (44) で $\tau = 0$ と置いた式を比べると

$$D = m\gamma k_B T \quad (46)$$

が成り立たなければならないことがわかる。ここで、 k_B はボルツマン定数 ($= 1.38 \times 10^{-23} \text{J/K}$) である。これがアインシュタインの関係式と呼ばれるものである。

また、式 (39) の両辺を形式的に Fourier 変換すると、

$$m(i\omega + \gamma)U(\omega) = F_B(\omega) \quad (47)$$

となるから、この線形系の周波数応答関数は

$$H(\omega) = \frac{1}{m(i\omega + \gamma)} \quad (48)$$

であることがわかる。そこで、式 (38) と式 (41) を用いると

$$S_u(\omega) = \frac{D}{\pi m^2 |i\omega + \gamma|^2} = \frac{D}{\pi m^2 (\omega^2 + \gamma^2)} \quad (49)$$

となる。これを式 (26) の Wiener-Khintchine の公式によって変換すれば式 (44) を求めることができる。後述のように、電気回路などでも雑音源を揺動力のように扱い、全く同じ議論で考えている回路の雑音のパワースペクトルを計算できる。

1.3 信号雑音比と測定帯域

もし、雑音のパワースペクトルが分かると、実際の信号との関係が議論できる。今、信号 $x(t)$ と雑音 $x_n(t)$ が存在するとき、ある時刻 t での信号雑音比 (Signal-to-Noise Ratio, SNR) を次のように定義する。

$$\text{SNR} = \frac{x(t)^2}{\langle x_n^2 \rangle} \quad (50)$$

たいていの場合、測定は何らかの信号処理 (フィルター) を含んでいるから、それを表す線形系のインパルス応答関数を $h(t)$ 、周波数応答関数を $H(\omega)$ とすると、その出力は式 (35) で表される。従って、出力での SNR は

$$\text{SNR} = \frac{y(t)^2}{\langle y_n^2 \rangle} = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega} \quad (51)$$

となる。ここで、 $X(\omega)$ と S_x はそれぞれ入力信号の Fourier 変換と雑音のパワースペクトルを表している。

今、信号が正弦波に近い場合を考えてみる。このときは、フィルターはその周波数 ($\omega_0 = 2\pi f_0$ とする) 付近では $H(2\pi f_0)$ という値をとり、そのほかの部分では急速に 0 に近い値をとるとすれば、信号成分では $y(t)^2 \approx |H(2\pi f_0)|^2 x(t)^2$ と考えて良い。雑音のスペクトルは逆に緩やかな関数になっているとすると、

$$\langle y_n^2 \rangle = \int_0^{\infty} |H(2\pi f)|^2 G_x(f) df \sim G_x(f_0) \int_0^{\infty} |H(2\pi f)|^2 df = |H(2\pi f_0)|^2 G_x(f_0) \Delta f \quad (52)$$

となる⁹。これを用いると出力での SNR は

$$\text{SNR} \sim \frac{x(t)^2}{G_x(f_0)\Delta f} \quad (53)$$

と書くことができる。この Δf が測定の (等価雑音) 帯域幅と呼ばれるものでその定義は、

$$\Delta f = \frac{\int_0^\infty |H(2\pi f)|^2 df}{|H(2\pi f_0)|^2} \quad (54)$$

である。このように、雑音の影響はその測定の仕方にも依存している。式 (53) をみると、 Δf を小さくすればいくらかでも SNR は大きくできるように見える。しかし、実際はそのような狭い帯域の測定を行うと信号自身が通過できなくなり、SNR は頭打ちになる。従って、測定の帯域幅には測定すべき信号と雑音のスペクトルによって決まる最適値が存在する。

今、式 (51) に対して、

$$A(\omega) = H(\omega)\sqrt{S_x(\omega)} \quad (55)$$

$$B(\omega) = X(\omega)e^{i\omega t}/\sqrt{S_x(\omega)} \quad (56)$$

を考えて、Cauchy-Schwarz の不等式、

$$\left| \int A(\omega)B(\omega)d\omega \right|^2 \leq \int |A(\omega)|^2 d\omega \int |B(\omega)|^2 d\omega \quad (57)$$

を使うと、

$$\text{SNR} \leq \int \frac{|X(\omega)|^2}{S_x(\omega)} d\omega \quad (58)$$

が成り立つことがわかる。さらに、等号が成り立つ場合は $A = B^*$ だから、

$$H_{\text{opt}} = \frac{X^*(\omega)e^{-i\omega t}}{S_x(\omega)} \quad (59)$$

を満たすようなフィルターを用いれば最適の SNR が得られることがわかる。このようなフィルターのことを Matched Filter と言う。しかし、このフィルターを設計するためには、あらかじめ信号の形がわかっていないといけないという点に注意しなければならない。もし信号に雛形 (関数形はわかっているが、いくつかの未知パラメータを含んでいるもの) がある場合には、上の関係式を使って SNR が最大になるように、その中に含まれるパラメータを決めることができる。

また、信号自身も確率過程で記述されるような場合には、Wiener-Kolmogoroff の理論や Kalman の理論があるが、ここでは述べない。

課題 1 式 (43) の積分は、 $\tau < 0$ の時はどうなるか計算せよ。

⁹両側スペクトル S を用いて $(-\infty, \infty)$ の範囲で積分を行う場合は $\pm\omega_0$ の付近の寄与を正しく拾わないといけないので、ここでは S ではなく G を用いた。

課題 2 減衰のある調和振動子のブラウン運動の自己相関関数とパワースペクトルを求めよ。

速度に比例する抵抗力を受けた調和振動子のブラウン運動の表す方程式は、式 (39) の左辺に変位に比例する力をつけ加えればよいので、

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x \right) = f_B(t) \quad (60)$$

で表される。これを用いて変位 x の相関関数とパワースペクトルを計算せよ。ここで、揺動力 $f_B(t)$ は白色雑音として考えてよい。熱平衡状態では

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T \quad (61)$$

が満たされるはずであるが、そのために揺動力の強さが満たす条件は式 (46) と等しいことを示せ。すなわち、揺動力の大きさは減衰項のみによって決まるのである。

課題 3 1 次ローパスフィルターと 2 次バンドパスフィルターの等価雑音帯域幅を求めよ。

直流信号を測定する場合に、基本となるのは 1 次のローパスフィルターで、

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau} \quad (62)$$

という周波数応答関数をもつ。ここで、 τ はフィルターの時定数で、遮断周波数 f_c とは $f_c = 1/(2\pi\tau)$ という関係がある。また正弦波に近い信号を測定する場合、いちばんよく用いられるのが 2 次のバンドパスフィルターで

$$H(\omega) = \frac{i\omega\omega_0/Q}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\omega_0/Q} \quad (63)$$

という周波数応答関数をもつ。ここで、 ω_0 は中心 (角) 周波数で、 Q はその回りの通過帯域幅 $\Delta\omega$ と $\Delta\omega = \omega_0/Q$ という関係で結ばれる。それぞれの場合に、式 (54) に従って、等価雑音帯域幅 Δf を求めよ。ただし、1 次のローパスフィルターについては直流成分に対して、バンドパスフィルターについては ω_0 の周波数の成分に対しての Δf とする。

2 種々の雑音

ここでは、代表的な雑音について述べる [2, 5, 6]。

2.1 熱雑音

任意の線型系で散逸が存在すると、それに伴って熱的な揺動が加わる。その代表的な例は電気回路における抵抗の熱雑音である。図 3 には、抵抗 R とそれともなう熱起電力 $v_i(t)$ 、および並列に加わった容量 C とその両端に現われる電圧 $v_o(t)$ を示している。また、 $v_i(t)$ 、 $v_o(t)$ のパワースペクトルをそれぞれ $S_i(\omega)$ 、 $S_o(\omega)$ とする。まず $S_i(\omega)$ と $S_o(\omega)$ の関係は、式 (38) を用いて

$$S_o(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega CR)^2} S_i(\omega) \quad (64)$$

となる。熱雑音のスペクトルは白色で

$$S_i(\omega) = D/\pi \quad (65)$$

とおく。

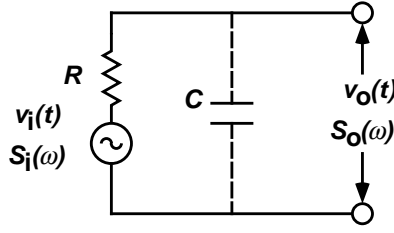


図 3: 抵抗の熱雑音計算のための等価回路

次に平衡状態においてはエネルギーの等分配法則によりコンデンサーの両端の電圧 $v_o(t)$ に対して次の関係が成立する。ただし、 T は抵抗の温度である。

$$\frac{C \overline{v_o^2(t)}}{2} = \frac{k_B T}{2} \quad (66)$$

式 (64)、(65) を用いることにより

$$\overline{v_o^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} S_o(\omega) d\omega = \frac{D}{CR} \quad (67)$$

が成り立つ。これと式 (66) により

$$S_i(\omega) = \frac{k_B T R}{\pi} \quad (68)$$

が得られる。また、

$$R_i(\tau) = 2k_B T R \delta(\tau) \quad (69)$$

である。

実際に測定されるのは $S_o(\omega)$ であるが、 $\omega CR \ll 1$ の周波数領域では $S_o(\omega) \sim S_i(\omega)$ としてよい。よって温度 T にある抵抗 R の両端にあらわれる熱雑音電圧を帯域幅 Δf で観測した時の 2 乗平均は

$$\overline{V_n^2} = 4k_B T R \Delta f \quad (70)$$

となる。これがナイキストの熱雑音の式である。

ここで用いた仮定は熱雑音が白色雑音であることと、エネルギーの等分配法則だけであることに注意せよ。これは、前に求めたアインシュタインの関係式と同等である。このように散逸のある場合にそれに相当する熱的な揺動が加わる。これを一般的な形で述べたものが揺動散逸定理であるが [4]、これ以上はここでは述べない。

2.2 散射雑音

電流は単位時間当たりにある断面を通過した電子の数で決まる。この電子の数は常に一定ではなくランダムに揺らぐものである。これによって電流値も揺らぎを持つ。この雑音を散射雑音（またはショットノイズ）という。これが、どのようなスペクトルを持つかは電子の数の揺らぎの仕方に依存している。全くランダムで相関が無い場合は、平均値が I の電流について

$$G_i = 2eI \quad (71)$$

というショットキーの定理が成り立つことが知られている。ここで、 e は素電荷 ($= 1.60 \times 10^{-19} \text{C}$) である。しかし、電子の運動が相関を持つ場合にはこの式は成り立たない場合があるので注意が必要である。

このような揺らぎはある現象がランダムに起きる場合の重ね合わせで表される場合に起きる。すなわち、ある物理量 Y が

$$Y(t) = \sum_k F(t - t_k) \quad (72)$$

のように、 F で表される個々の現象の和で書き表され、それが起きる時刻 t_k が全くランダムなときには、その揺らぎのパワースペクトルは Carson の定理により

$$G_Y(f) = 2\lambda |\psi(f)|^2 \quad (73)$$

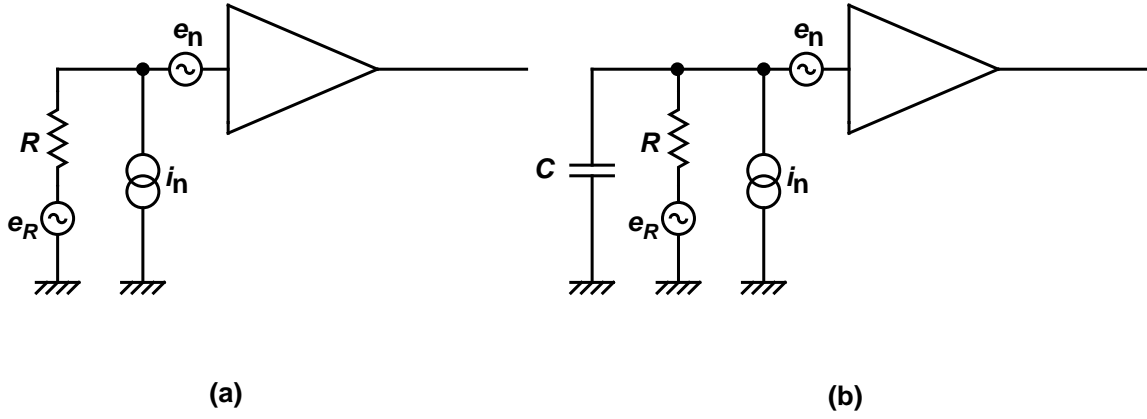


図 4: 増幅器の雑音

となることが示されている [6]。ここで、 λ は単位時間当たりにかかる事象の回数の平均値で ψ は

$$\psi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (74)$$

である。また、 F は $F(t) = 0$ ($t < 0$) を満たすものとする。何も相関が無いような電子の運動を考えると、電流に対しては $F(t) = e\delta(t)$ と表されるから、

$$G_i = 2e^2\lambda = 2eI \quad (I = e\lambda) \quad (75)$$

となって、式 (71) が成り立つ。

2.3 $1/f$ 雑音

増幅器に用いられるような能動的な素子 (トランジスタ、FET など) の雑音のパワースペクトルは周波数が低くなると周波数に反比例し大きくなる現象が知られている。このような雑音を $1/f$ 雑音またはフリッカー雑音といい、

$$G \propto 1/f^\alpha \quad (76)$$

という形で表すことができる。ここで、 α はおよそ 1 の量である。

このような雑音がなぜ発生するかは良くわかっていないが、いろいろな種類の揺らぎのスペクトルを調べると、かなりの広い範囲でこの形のスペクトルを示す事がわかっている。

2.4 増幅器の雑音と雑音指数

増幅器の雑音は入力信号をマスクするように働く電圧性雑音 e_n と増幅器から入力の方へ流れだしていく電流性雑音 i_n がある。これを模式的に書いたものが図 4(a) である。ここで入力は抵抗 R で接地されるとし抵抗の熱雑音を考えて、増幅器の入力電圧 v_i は

$$v_i = e_R + e_n + Ri_n \quad (77)$$

となる。これをパワースペクトルの関係にすると

$$G_v = G_R + G_e + R^2G_i = 4kTR [1 + (G_e/R + RG_i)/4kT] \quad (78)$$

となる。従って、 $R = 0$ のときは入力に現れる雑音は電圧性雑音であり、逆に R が非常に大きくなると電流性雑音が支配的になる。そして、 $G_v/4kTR$ を雑音指数 (Noise Figure, NF) という。

$$NF = 1 + (G_e/R + RG_i)/4kT \geq 1 + \frac{T_n}{T} \quad (79)$$

で等号は $R = R_{\text{opt}}$ の場合で、 T_n 、 R_{opt} は増幅器の雑音温度と最適信号源抵抗と呼ばれる量で以下のように定義される。

$$T_n = \frac{\sqrt{G_e G_i}}{2k} \quad (80)$$

$$R_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{G_e}{G_i}} \quad (81)$$

このように、実際に入力に現れる雑音は測定される信号源の抵抗値、もっと一般的にはインピーダンスによって変わる。入力に純抵抗以外に容量を含むような場合には信号源は抵抗とコンデンサーが並列につながったもので (図 4(b))、この場合の入力に現れる雑音は

$$G_v = G_e + |Z(\omega)|^2 \left(\frac{4kT}{R} + G_i \right) \quad (82)$$

$$\frac{1}{Z(\omega)} = \frac{1}{R} + i\omega C \quad (83)$$

となる。

増幅器の雑音はおもに初段に使われている能動素子の特性で決まる。例えば、接合形 FET (電界効果トランジスタ [7]) と呼ばれるものを用いた場合の雑音スペクトルの例を図 5 に示す。ここで測定した FET は

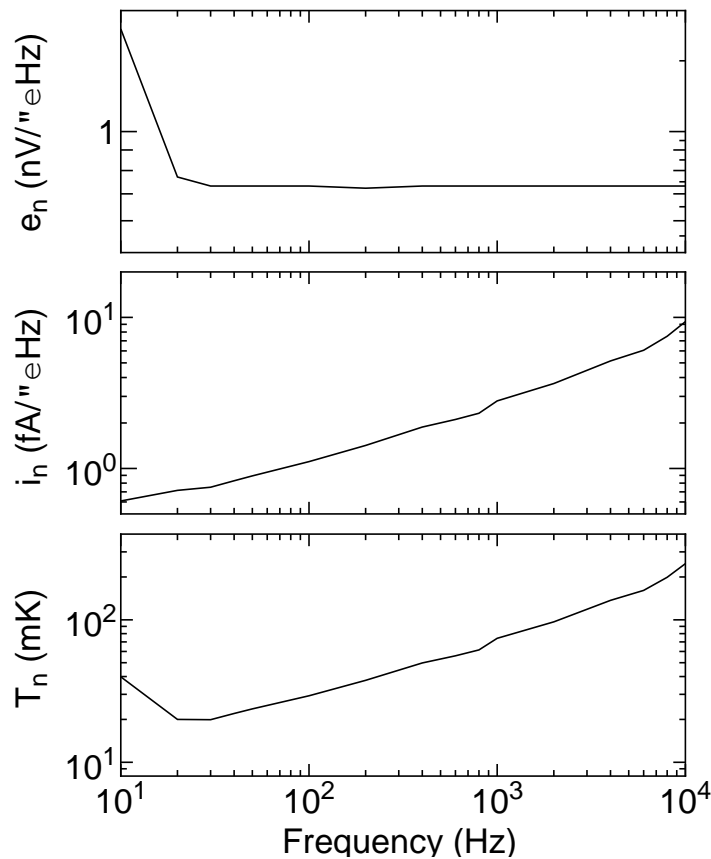


図 5: FET の雑音スペクトル。

東芝製の 2SK147 で、現在に入手できるものなかでは、非常に雑音の小さなものである。グラフを見てわかるように、電圧性雑音は低い周波数で $1/f$ 雑音に近い振る舞いをしている。また、電流性雑音は高い周波数で増大しているが、これは、FET のゲートとドレイン間の容量結合によって、ドレイン電流の散射雑音がゲート側に漏れてくるためであると考えられている。

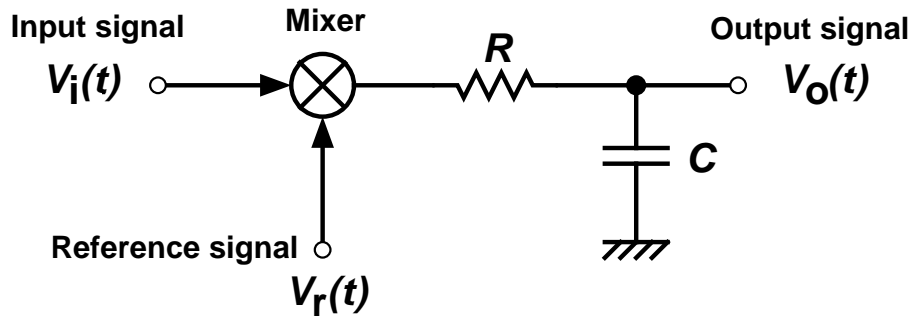


図 6: ロックインアンプの基本構成

課題 4 以下の量を単位を付けて計算せよ。ただし、パワースペクトルは \sqrt{G} に換算すること。

1. $1\text{k}\Omega$ の抵抗の熱雑音 (温度は 300K)、
2. ショトキーの定理に従う $1\mu\text{A}$ の電流の散粒雑音。
3. 電圧性雑音 $1\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ と電流性雑音 $2\text{fA}/\sqrt{\text{Hz}}$ を持つ増幅器の最適信号源抵抗と雑音温度。

3 ロックインアンプと変調法

ここでは、微弱信号計測で非常に重要な役割を果たすロックインアンプとそれを活用した変調法について述べる [2, 8]。

3.1 ロックインアンプ

ロックインアンプは PSD (Phase Sensitive Detector) と呼ばれ、物理実験の様々な分野で良く使われる測定器である。ロックインアンプの主な機能は、入力信号の中からある特定の周波数成分だけを取り出すことにあり、雑音等に埋もれた既知の周波数をもった信号を拾い出す場合などに用いられる。市販のロックインアンプは様々な付加機能をもっているが、その原理的な部分を簡単に説明する。

基本的回路構成は図 6 に示すように、2つの入力端子 (信号入力と参照信号入力) とひとつの信号出力をもっている。入力信号を $V_i = A \cos(\omega_i t + \phi)$ 、参照信号を $V_r = B \cos \omega_r t$ とすると、ミキサーでかけあわせた後の出力 $V_m(t)$ は次のようになる。

$$V_m(t) \propto \{\cos[(\omega_i - \omega_r)t + \phi] + \cos[(\omega_i + \omega_r)t + \phi]\} \quad (84)$$

この出力を次段のローパスフィルターで積分するため、 $\omega_i - \omega_r$ が 0 に近い場合だけ信号が生き残る。この時 $\omega_i + \omega_r$ の成分は周波数が高いためフィルターで落とされる。また $\omega_i - \omega_r = 0$ の時はフィルターの出力は $\cos \phi$ に比例する。これが同期検波と呼ばれるものであり、これによって入力信号の位相の情報を得ることができる。 $\tau_p = RC$ の積分時定数をもったロックインアンプの出力を式であらわすと、次のようになる。

$$V_0(t) = \frac{\sqrt{2}}{\tau_p} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_p}\right) \cos(\omega_r s) V_i(s) ds \quad (85)$$

アンプ出力の規格化は、入力信号を $V_i = A \cos(\omega_i t + \phi)$ として参照信号の周波数と位相を出力が最大になるように選んだとき ($V_r = B \cos(\omega_i t + \phi)$)、フィルターの出力として $A/\sqrt{2}$ つまり入力信号の RMS (root mean square) 値が得られるようになっている。

実際のロックインアンプではミキサーでのかけ算を容易にするため、参照信号は正弦波ではなく矩形波になっていることが多い。この場合には矩形波の参照信号には ω_r 成分の他に $3\omega_r, 5\omega_r, \dots$ などの奇数倍

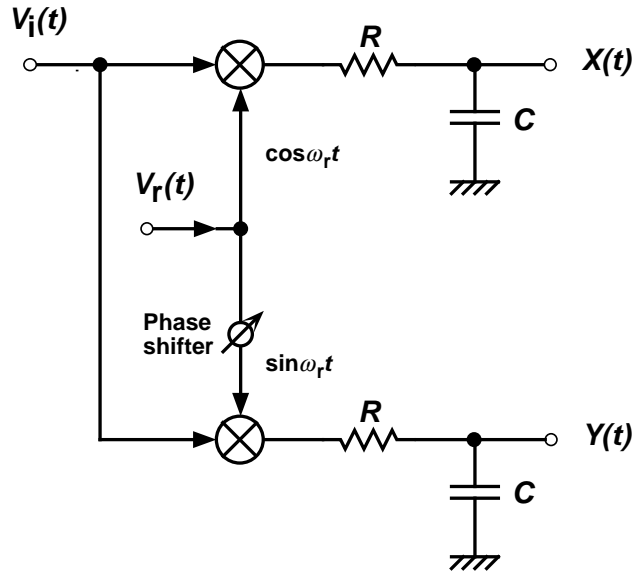


図 7: 2 位相ロックインアンプの基本構成

波成分が含まれることになる。そこで入力信号のなかでこれらの成分の寄与を取り除くため、ロックインアンプに入力する前に ω_r を中心としたバンドパスフィルターに通すことが必要となる。

ロックインアンプの等価雑音帯域幅は、 $e_n[\text{volt}/\sqrt{\text{Hz}}]$ の白色雑音を入力したとき、出力の 2 乗平均が $e_n^2 \Delta f [\text{volt}^2]$ となるような Δf で定義され、 $1/(4\tau_p)$ となる。

また、入力信号の位相を知るには、図 7 に示したように入力信号を 2 つにわけ、それぞれ $\cos \omega_r t$ と $\sin \omega_r t$ の参照信号をもった 2 つの同期検波部に通せばよい。これは 2 位相ロックインアンプと呼ばれている。それぞれの出力を $X(t)$ 、 $Y(t)$ とし $Z(t) = X(t) + iY(t)$ の複素数の形で出力をまとめると¹⁰、以下のようになる。

$$Z(t) = \frac{\sqrt{2}}{\tau_p} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_p}\right) \exp(i\omega_r s) V_i(s) ds \quad (86)$$

この場合、白色雑音に対する 2 乗平均 $\overline{|Z|^2}$ を考えると、その等価雑音帯域幅は $1/(2\tau_p)$ となる。

一般に τ_p は 10ms から 10s 程度で、更に、デジタル処理を行うと 1000s くらいのもが可能になる。この値は必要な SNR によるが、例えば、 $\tau_p = 1 \text{ s}$ として、 $f_0 = 1 \text{ kHz}$ の信号を測定すると、共振器の Q に相当するような相対的な選択度は $2\pi\tau_p f_0 \sim 6000$ となる。このような狭帯域の測定は普通の方法では難しい。また、最近ではすべての処理をデジタルで行う（データをサンプリングして内蔵の計算機で参照信号との掛け算、ローパスフィルターなどをすべてデジタル信号として処理する）デジタルロックインアンプというものも存在している。

3.2 変調法

変調法は測定すべき信号にあらかじめ特定の信号で変調を掛けておき、検出した信号からその周波数成分だけの信号を上述のロックインアンプで測定する方法である。変調を掛ける一番の有利な点は、他の信号が紛れ込む可能性が非常に小さいことである。また、非常に一般的に、雑音レベルは周波数が低いほど大きくなるので、変調周波数をうまく選ぶと、元々雑音の小さいところで測定ができる。

例を挙げて説明しよう。図 8 は、非常に反射率の大きな鏡の透過率（50ppm 以下）を測定する装置である。He-Ne レーザーから出た光は音響光学変調器（AOM）によってある周波数 ω で強度変調される。この状態で鏡を入れたときとはずした時で、光検出器に入る光の量の比を測定することにより透過率 T を求める。このとき、光検出器の信号は直流成分と変調周波数の交流成分を持っていて、鏡を入れない時、

$$I(t) = I_0(1 + \alpha \cos \omega t) + I_n(t) \quad (87)$$

¹⁰市販のロックインアンプでは $Z(t) = X(t) - iY(t)$ としているものが多いので使用する場合にはよく確かめる必要がある。

で、入れた場合は

$$I_t(t) = T \cdot I_0(1 + \alpha \cos \omega t) + I_n(t) \quad (88)$$

である。ここで、 $I_n(t)$ は検出器に存在する雑音である。もし、 $T \ll 1$ ならば、鏡の透過光測定時には、雑音の影響を強く受けることが分かる。もし、直流成分の測定を行うと I_n のパワースペクトルの直流付近の成分の寄与が支配的になる。すなわち

$$\delta I_{DC} = \sqrt{G_I(0)\Delta f} \quad (89)$$

となる。周りから迷い込む光の影響や検出器や増幅器の雑音は低い周波数成分で非常に大きくなり、 δI_{DC} は非常に弱い透過光に比べて、大きな値を持つ。その点、周波数 ω の交流成分の測定では、 I_n のパワースペクトルの ω 付近の成分の寄与が支配的になるので、

$$\delta I_\omega = \sqrt{G_I(\omega)\Delta f} \quad (90)$$

となる。信号の成分は直流の成分に比べて $\alpha/\sqrt{2}$ になり、普通、 $\alpha < 1$ であるが、 $G_I(0) \gg G_I(\omega)$ となるので、その揺らぎの影響が非常に小さくなり、測定感度が飛躍的に増大する。この様子を模式的に表したものが図9である。そして、交流成分を測定するための主役は、上で述べたロックインアンプで、その時定数を大きくすることで、更に、高いSNRを得ることができる。

この方法は非常に一般的な微弱光検出法であり、AOMの代わりにチョッパーで光に強度変調をかけたり、光が非常に弱い場合は光検出器として光電子増倍管を用いたりする。

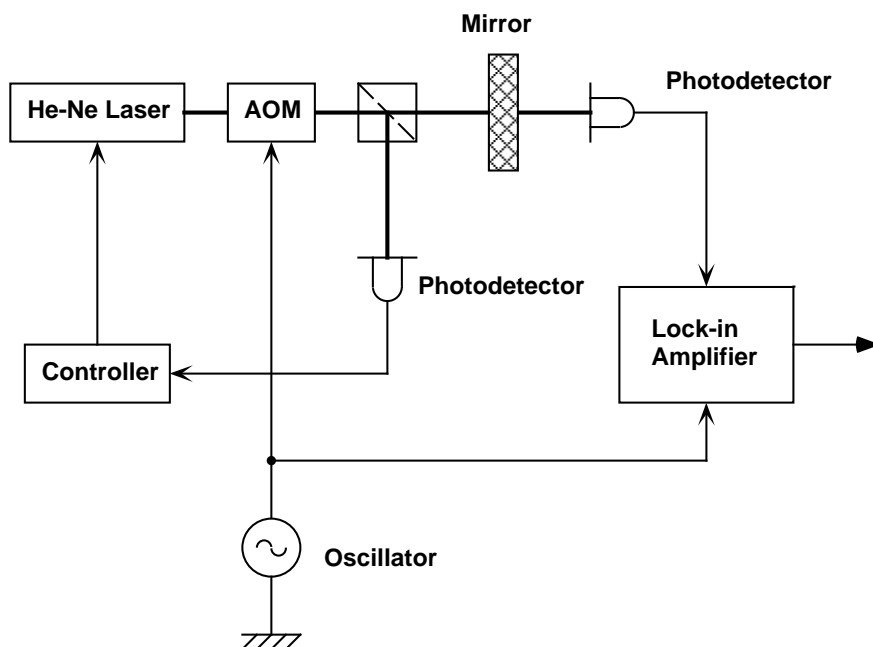


図 8: 高反射率鏡の透過率の測定例

ただし、この方法では、光源の持つ揺らぎは取り除くことはできない。すなわち、 $I_0 \rightarrow I_0 + \delta I(t)$ のように考えてみると、式 (90) は

$$\delta I_\omega^2 = (G_I(\omega) + (T\alpha/2)^2[G_{\delta I}(0) + G_{\delta I}(2\omega)]) \Delta f \quad (91)$$

となる。ここで $G_{\delta I}$ は光源の持つ揺らぎのパワースペクトルである。これを見ると、 $G_{\delta I}(0)$ が δI_ω の中に表れている。これは光源の低周波の揺らぎの成分は変調によって、変調周波数付近の信号になり、測定すべき信号に大きな影響を持つことを意味している。もし、 $(T\alpha/2)^2 G_{\delta I}(0) > G_I(\omega)$ となれば、この測定の基本的な雑音源は光源の揺らぎであるということになる。実際に、光源自身は低い周波数では、大きな揺らぎを持っているので、上の条件を満たしてしまう場合もないわけではない。これを取り除くため、図中に示されているようにレーザーの出力の一部を取り出し、負帰還（後述）による安定化を行っている。

課題 5 ロックインアンプの帯域幅が、単相 で $1/(4\tau_p)$ 、2 位相の場合は $1/(2\tau_p)$ になることを示せ。

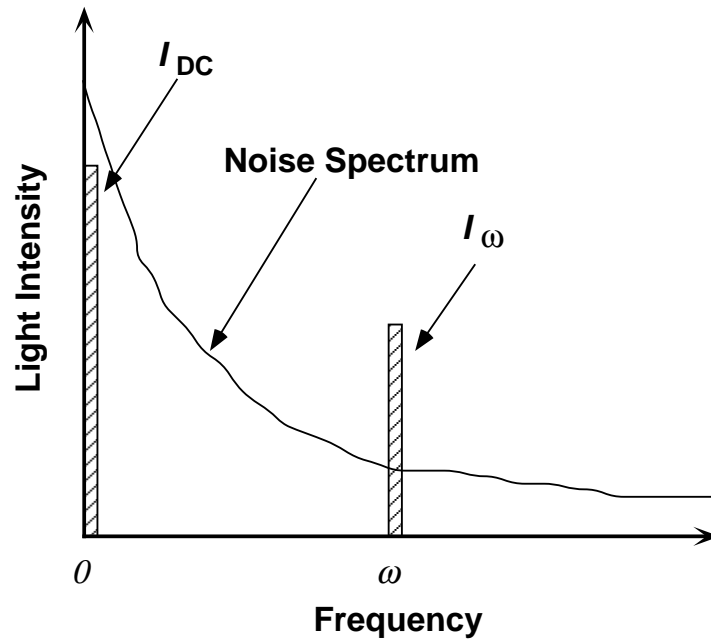


図 9: 変調法と雑音のスペクトルの関係

3.2.1 変調と微分検出

変調を用いた検出法は上で述べたように雑音の低減に非常に有効な方法であるが、それ以外の理由で変調を利用する場合がある。その代表的な例が、微分を検出ためである。今、ある物理量 y を別の物理量 x の関数として測定する。この 2 つには、

$$y = f(x) \quad (92)$$

という関係があるとしよう。 y を x の関数として測定する場合に、 x に周波数 ω_m で変調を掛ける。すなわち

$$x = x_0 + x_m \cos \omega_m t \quad (93)$$

とする。このとき、 y は

$$y = f(x_0 + x_m \cos \omega_m t) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right) x_m \cos \omega_m t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) (x_m \cos \omega_m t)^2 \dots \quad (94)$$

となる。そこで、 y の ω_m の周波数成分を検出すると df/dx に比例した信号を検出できる。もちろん、このときにはロックインアンプを利用する。このような微分検出は、共鳴曲線のピークの中心を正確に決定する場合に非常に有効である。

4 負帰還の利用

電気系、機械系を含む広い範囲で、実験、計測などの使われている負帰還の技術について述べる [9]。

4.1 負帰還とは

負帰還とは、ある系があるとき、その出力の一部を取り出して、適当な細工をして入力に戻すことをいう。負帰還を利用することで、

1. 本来、不安定な系に安定な動作をさせる
2. 非線型性を除き、歪率を改善する

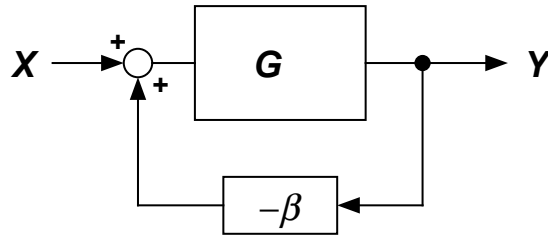


図 10: 負帰還による増幅器

3. 系の応答速度を改善する
4. 入力揺らぎを取り除いて安定化する

などのことができる。最初の2つの点に関する典型的な例は負帰還を利用した増幅器であろう。これは、様々な教科書に例が載せられている。

今、図10のように、増幅器の増幅率を G とし、増幅率 β で負帰還を掛ける。この系の入力を x 、出力を y とすれば、全体の方程式は

$$y = G(x - \beta y) \quad (95)$$

となるので、

$$y = \frac{Gx}{1 + \beta G} \approx \frac{x}{\beta} \quad (|\beta G| \gg 1) \quad (96)$$

と書ける。

従って、増幅器本来の増幅率 G は姿を消して、 β だけが残る。通常、 β を決める負帰還系は抵抗やコンデンサーなどの受動的で線型性の良い素子から構成されるので β 自身は安定な値をとる。そのため、 G が多少変化しても負帰還された系での増幅率 $G/(1 + \beta G)$ はあまり変化しない。さらに、増幅器が線型ではないような場合を考えると、

$$y = G(x - \beta y) \left[1 + \sum_{n=1} \varepsilon_n (x - \beta y)^n \right] \quad (97)$$

となるが、これを逐次近似で解くと

$$y \approx \frac{Gx}{1 + \beta G} \left[1 + \sum_{n=1} \varepsilon_n \left(\frac{x}{1 + \beta G} \right)^n \right] \quad (98)$$

となり、非線型項の影響が $1/(1 + \beta G)$ になる。このような負帰還の効果は精密な測定では非常に有効である。ここで、 βG はオープンループゲイン、または、オープンループ伝達関数と呼ばれ、一般には周波数の関数である。

3番目に関連した古典的な例は、検流計の針の動きを負帰還で制御して定常値に落ちつく時間を短くするというものである。実際には力学系（機械系）を制御する場合には非常に多く用いられている。たとえば、検流計の針の角度 θ の運動方程式は

$$\Lambda(\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\theta) = \kappa I \quad (99)$$

と書くことができる。ここで、 Λ 、 γ 、 ω_0 はそれぞれ力学系の慣性能率、減衰係数、共振周波数で、 κI は検流計に流れる電流 I で生じるトルクである。電流をステップ関数的に加えて、それが平衡位置に落ちつくまでの時間は $1/\gamma$ に比例する。そこで、 θ を測定し電氣的に微分してそれをトルクとしてフィードバックする。すなわち、右辺に $-\eta\dot{\theta}$ をつけ加えるのである。これを式で書けば

$$\Lambda(\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\theta) = \kappa I + N_{\text{feedback}} \quad (100)$$

$$N_{\text{feedback}} = -\eta\dot{\theta} \quad (101)$$

となる。この二つの式を使うと

$$\Lambda[\ddot{\theta} + (\gamma + \eta/\Lambda)\dot{\theta} + \omega_0^2\theta] = \kappa I \quad (102)$$

となり、減衰を表す項の係数が $\gamma \rightarrow \gamma + \eta/\Lambda$ となり速度が改善される。通常は、 $\gamma + \eta/\Lambda = 2\omega_0$ （臨界制動の条件）を満たすようにフィードバック系を設計する。

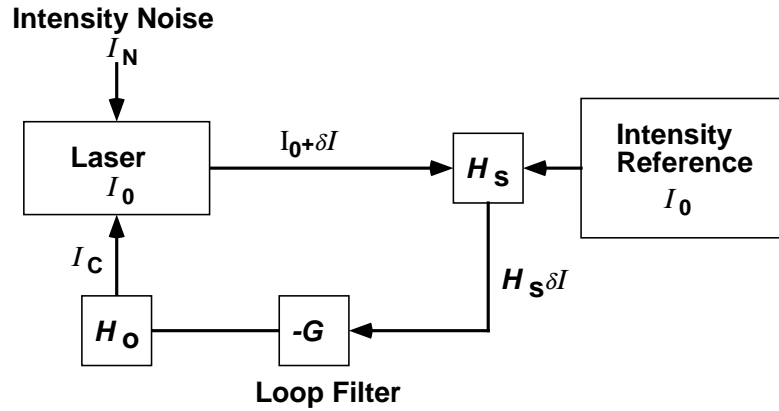


図 11: 負帰還による強度安定化系

ところで、元々機械系の散逸が大きい系と、負帰還を使った系ではどこが違うのだろうか。それは、系の熱雑音の違いである。散逸の大きな系ではアインシュタインの関係で熱雑音力の大きさも大きくなる。しかし、負帰還系では負帰還系の雑音が（系の熱雑音に比べて）十分小さい場合には、新たな雑音力が生じない。従って、見かけ上、熱振動による針の動きが小さくなる。すなわち、温度が下がって見えるのである[5]。しかし、残念なことに温度が下がっても SNR は向上しない¹¹。

最後の安定化は恒温槽、定電圧電源など、様々な実験装置に組み込まれて、活用されている技術である。そこで、もう少し詳しく述べる。

4.2 負帰還による安定化

何かの物理量を安定化するには、

1. 基準になるものを用意し、その基準と現在の安定化すべき物理量とのずれを検出する。
2. ずれた分を補正して、その量が基準に一致するように制御する。

という手続きを行えばよい。これが負帰還による安定化である。安定化の制御については、高い安定度を得るための負帰還系の設計が重要である。

上で述べたレーザーの強度の安定化を例にする。図 11 で示すようなモデルのダイアグラムを考える。レーザーの発振強度は I_0 を中心として、それからのずれを δI とする。このとき、 δI は強度雑音 I_N と制御による強度変化分 I_C を加えたものである。すなわち

$$I_{\text{Laser}} = I_0 + \delta I \quad (103)$$

$$\delta I = I_N + I_C \quad (104)$$

と書き表すことができる。これが、強度基準（この場合は基準の強度を I_0 とする）と比較されて、その差が制御系の誤差信号になる。そして、それが制御回路を通して最終的にレーザーの強度を制御する素子に返されるのである。この負帰還系を表す方程式は

$$v_s = H_s(I_{\text{Laser}} - I_0) = H_s \delta I \quad (105)$$

$$v_o = -G v_s \quad (106)$$

$$I_C = H_o v_o \quad (107)$$

となる。ここで、 H_s は強度変化が起きたとき電気信号にどう現れるかを表す変換係数、 H_o は制御信号を加えたときどれだけ強度が変化するかを表す変換係数、 G は電気系の伝達関数を表す。これらを解くと

$$\delta I = \frac{I_N}{1 + F} \quad (F = H_s G H_o) \quad (108)$$

¹¹元々減衰の大きな系と比べると、検出感度は上がるが、フィードバックを掛ける掛けないは SNR に依存しない。

となる。ここで、 F はこの系のオープンループゲインである。式 (108) で、 $|F| \gg 1$ とすると

$$\delta I \sim \frac{I_N}{F} \quad (109)$$

となるから、強度変動の成分は強度雑音のオープンループゲイン分の 1 になり、レーザーの強度は I_0 に固定される。従って、大きなゲインを持つ負帰還系をつくると、その分だけ揺らぎを抑えることができる¹²。

もちろん、ここで議論した I 、 v 、 H 、 G などは各物理量を Fourier 変換したもので、考えている変動成分の周波数の関数になる。すなわち、

$$\delta I_N(t) = \delta I_N(\omega)e^{i\omega t} \quad (110)$$

と考えた時、式 (108) は

$$\delta I(\omega)e^{i\omega t} = \frac{I_N(\omega)}{1 + F(\omega)}e^{i\omega t} \quad (111)$$

という関係を意味している。実際には、すべての ω に対して $|F| \gg 1$ を満たすことは不可能なので、雑音を抑圧できる周波数帯域は限られたものとなる。

実際に安定化を行った例を示す。図 12 の上のグラフはレーザーの出力光の強度を時間の関数としてプロットしたものである。これは、温度変化でレーザー管の長さが変化して、強度がゆっくりと変わる現象によることがわかっている。そこで、レーザー管にヒーターを巻いて温度を制御し、レーザーの発振出力が一定になるように負帰還を行ったものである。下のグラフはそのヒーターに加えた電圧を示している。ヒーターは暖めることしかできないので、あらかじめ一定の電圧を加えておき（図では 5V）、その周りで変化させることで温度制御をしている。“Feedback on” と示されたところで負帰還を掛けると、過渡応答の状態を経て、出力が一定になることがわかる。ここで、基準となっているのは制御系の中にある基準電圧源であり、この電圧とレーザー光の出力に比例した電圧を比較し、その差がいつも無くなるようにヒーターの電圧を制御している。

4.3 負帰還系の安定性

負帰還系の特性はオープンループゲインの周波数特性で決まる。以上のような議論からオープンループゲインは大きい方が優秀な負帰還系と考えられるかもしれない。しかし、装置が安定に動作するという点はまた別の問題である。

オープンループ伝達関数 F が決まるとそこから負帰還を掛けてループを閉じたときの特性が決まるが、この関数の分母は $1 + F$ という形をしている。もし、ある周波数で $F = -1$ になったとすると、この周波数ではループが不安定になっていることは容易にわかる。ただ、 F は複素数のため、 $F = -1$ を厳密に満たすような場合はむしろ少ない。しかし、実際には負帰還系が不安定になって発振するというのは珍しい現象ではない。このような場合は、たいてい、 $1/[1 + F(\omega)]$ という関数を逆 Fourier 変換すると、 $e^{\alpha t}$ ($\alpha > 0$) に比例するような項を含んでいる。そして、この成分が成長してある程度大きくなると、信号がそれ以上大きくできなくなる（飽和する）ことにより、自動的に $F = -1$ を満たすような状況が実現されてしまい、定常的な発振が維持されるのである。

このような飽和現象は非線型の効果であるが、その元になる指数関数で発散する項の存在は線型理論で理解できる。このような項は ω 平面で考えた時に、 $1/[1 + F(\omega)]$ が下半面に極を持つ場合に現れる。すなわち、

$$1 + F(\omega) = 0 \quad (112)$$

の解がすべて、上半面にあればこの負帰還系は安定であるということがわかる。この方程式は特性方程式と呼ばれ、その根は特性根と呼ばれる。また、制御理論では Fourier 変換ではなく、

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (113)$$

で定義される Laplace 変換を用いて議論する機会が多い。この場合、 $s = i\omega$ とすれば同等の議論ができる。

しかし、現実はこの解をすべて求めることはできないので、系の安定性に関して、いろいろな判定法が考案されている。その一番基本的な方法は、Nyquist の判定法であり

ω を $-\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$ と変化させたときに、 $F(\omega)$ の実部と虚部が複素平面上に描く軌跡（Nyquist 軌跡）が、 $(-1 + i0)$ を反時計回りに回る数を N 、 $F(\omega)$ の極のうち下半面にある（虚数部が負¹³）のもの数を

¹²もちろん、その揺らぎを完全になくすことはできない。どの程度まで抑圧できるかはその負帰還系の SNR に依存している。

¹³ s を用いた記法では「 $F(s)$ の極で実部が正」となる。

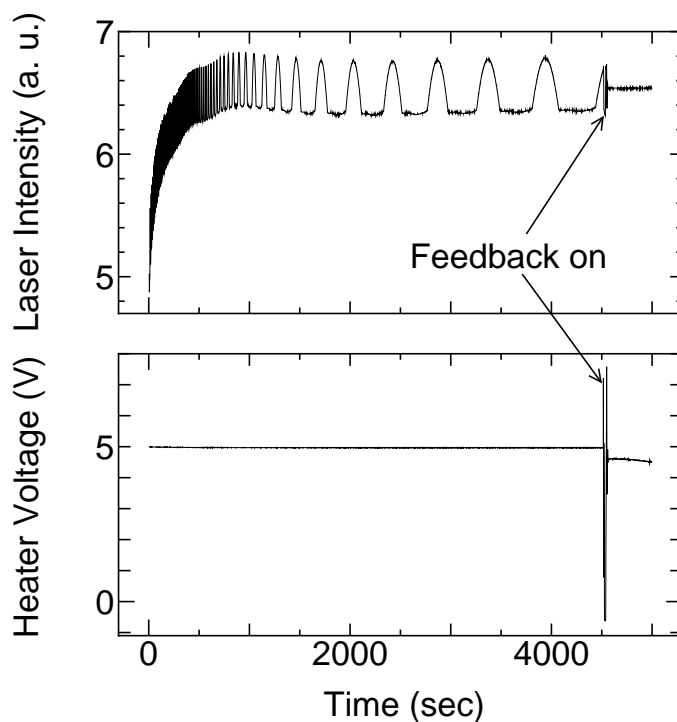


図 12: 負帰還による強度安定化の例

P とすると、 $N = P$ の時に限って、この制御系は安定である。

と表現されている。実際にはオープンループ伝達関数自身が安定で $P = 0$ となっているはずだから、 $N = 0$ でなければならない（証明は課題 6）。そのほかの安定不安定に関する判定法などは参考文献を見て欲しい [9]。このような周波数応答関数に基づいた制御理論は古典的制御理論と呼ばれている。

課題 6 Nyquist の判定法を証明せよ。ただし、 $F(\omega)$ は ω の複素有理関数とする。

このためには以下の積分を考えればよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+F(\omega)} \frac{dF(\omega)}{d\omega} d\omega \quad (114)$$

この積分を

$$\frac{1}{1+F(\omega)} \frac{dF(\omega)}{d\omega} = \frac{d \log[1+F(\omega)]}{d\omega} \quad (115)$$

と考えると、 $1+F$ の軌跡が原点、つまり F の軌跡が $(-1+i0)$ を回る回数が計算できる。また、上の積分を ω の複素積分として取り扱えば、極や零点の寄与が計算できる。この二つを比較すれば証明ができる。

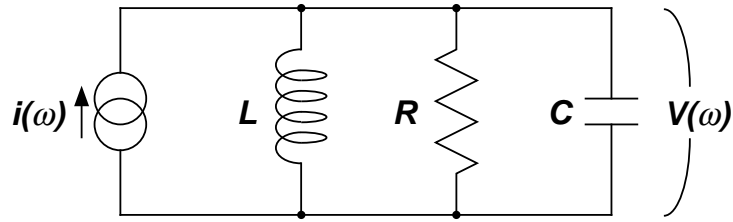


図 13: LCR 並列共振回路

課題 7 検流計の針の運動に負帰還を掛けて減衰を増やした場合、等価温度を

$$T_{\text{eff}} = \Lambda \omega_0^2 \langle \theta^2 \rangle / k_B \quad (116)$$

で定義すると、

$$T_{\text{eff}} = \frac{\gamma}{\gamma + \eta/\Lambda} T \quad (117)$$

となることを示せ [5]。

式 (99) と式 (102) の右辺には、同じ大きさの揺動力が働いているはずで、式 (99) では熱平衡の条件を満たしているはずである。しかし、式 (102) では負帰還による速度に比例する減衰力が加わるので、平衡状態にはならない。しかし、定常状態では揺らぎの大きさを等価温度を定義できるので、その温度を実現する揺動力の強さを式 (46) で表されるアインシュタインの関係を適用すればよい。この結果を比較すると式 (117) の関係が求められる。

5 共振現象の利用

共振を引き起こす現象はたくさんあり、その物理は非常に幅広い。また、それを利用した計測法、実験法もたくさんある。しかし、ここでは測定すべき現象そのものが共振現象ではなく、共振を利用してセンサーの感度を上げたり、増幅器の雑音を下げたりする方法を述べる。

5.1 共振系

図 13 はコイル (インダクタンス L)、コンデンサー (容量 C)、抵抗 (電気抵抗 R) からなる並列共振回路に定電流源を接続した例である。この系のアドミッタンス $Y(\omega)$ は

$$Y(\omega) = \frac{i(\omega)}{V(\omega)} = i\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} \quad (118)$$

で、インピーダンス $Z(\omega) = 1/Y(\omega)$ は

$$Z(\omega) = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC + i\omega L/R} \quad (119)$$

となり、よく知られているように、共振周波数 ω_0 は

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (120)$$

で、共振の鋭さを表す Q は

$$Q = \frac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (121)$$

で与えられる。

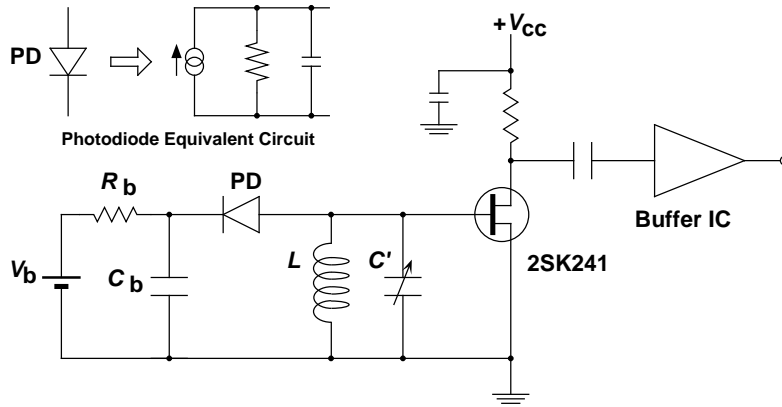


図 14: 共振を利用した同調型の光検出器

また、インピーダンスの絶対値と位相角 ϕ を考えると

$$|Z(\omega)|^2 = R^2 \frac{(\omega\omega_0/Q)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\omega_0/Q)^2} \quad (122)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)Q}{\omega_0\omega} \right] \quad (123)$$

となる。従って、定電流源で駆動した場合に、両端の電圧は、共振周波数付近で、振幅は鋭いピークをもち、位相は急激に変化する。このような特性を持った共振系は

1. 狭帯域のフィルター
2. 安定な発振器
3. 高感度センサー

などに利用されている。

図 14 は、 LC 共振を初段に利用した光検出器である。フォトダイオードは図中の等価回路に示されているように、定電流源と信号源抵抗、及び、容量が並列接続されたものと考えられる。そして、この電流源の出力電流が、光電流で入射光の強度に比例しているのである。この回路では、フォトダイオードの持つ容量とコイルを組み合わせ、共振回路を構成し、信号の周波数にだけ高い感度を持つような設計がなされている。このような検出器と前に述べた変調法を組み合わせることで、高い SNR を得ることができる。

5.2 High- Q 共振器

共振器の Q は、その共振系の損失を表していて、損失の少ない系ほど共振が鋭い。例えば、電気回路では Q は大きくても数 100 であるが、超伝導を利用したマイクロ波の空洞共振器では 10^9 を越えるものが作られている。また、力学系の共振器でも、サファイアやシリコンの単結晶では、その弾性振動の固有モードの Q は 10^9 に達する（測定は液体ヘリウム温度）。また、光共振器では、 $Q > 10^{12}$ に達するものも作られている。最近では、微小球を用いた光共振器でも 10^9 を越えるものが作られた。このような非常に Q の高い共振器は、高感度センサー、超高安定度発振器、周波数基準などに用いられている。

図 15 は、光共振器を周波数基準にしたレーザー周波数の安定化装置である。現在の技術では、鏡の損失を 1ppm のオーダーにすることが可能で、長さ 30cm の共振器を用いると、共振の幅が約 160Hz になり、光周波数を 300THz ($\lambda = 1\mu\text{m}$) とすれば、 $Q = 10^{12}$ となる。実際、反射率 99.99% 程度の鏡 (Q にして、 10^{10} 程度) を用いて、安定化されたレーザーの線幅は 1Hz 以下になっていることが報告されている。また、このシステムでは、レーザー光に高周波で位相変調を掛け、同調型の光検出器と同期検波を使って、信号成分を効率よく取り出し、負帰還技術を駆使して安定化を行っている。すなわちこれまで述べてきた技術の集大成である。

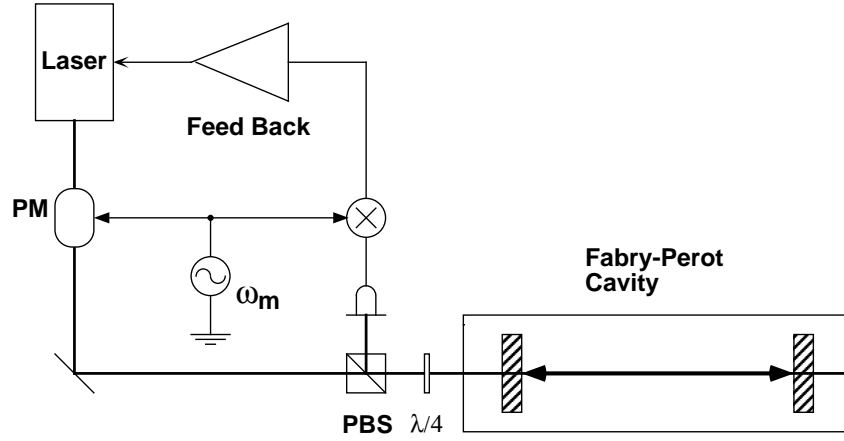


図 15: Fabry-Perot 共振器を用いたレーザーの安定化装置

5.3 共振を利用した変位センサー

共振系をセンサーに応用する場合は、ある物理量が共振系のパラメータと結びついているものを用いる。たとえば、図 13 でコンデンサーが平行平板コンデンサーとすると容量は、間隔を d 、極板面積を S とすると

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad (124)$$

となるが、この d が極板のとりつけられた物体の位置によって x だけ変化したとすると

$$\delta C = -\frac{\varepsilon_0 S}{d^2} x \quad (125)$$

となり、系の共振周波数は

$$\delta \omega_0 = -\omega_0 \frac{\delta C}{2C} = \omega_0 \frac{x}{2d} \quad (126)$$

だけ変化する。そして、共振回路の電圧の位相変化は

$$\delta \phi = Q \frac{x}{d} \quad (127)$$

と Q 倍される。もし、 $i(t) = i_0 \cos \omega_0 t$ とすると、回路の両端の電圧は $\delta \phi$ の一次で近似すると

$$V(t) \approx Ri_0(\cos \omega_0 t - \delta \phi \sin \omega_0 t) \quad (128)$$

となるので、ロックインアンプを使い、参照信号の周波数と位相を合わせて、 $\sin \omega_0 t$ に比例する成分を取り出すと、

$$\delta V = i_0 R \delta \phi / \sqrt{2} \quad (129)$$

という出力が得られる。

次に、雑音を考える。発生する雑音が回路の熱雑音の場合には、雑音のパワースペクトルは

$$G_V(\omega) = 4k_B T R \frac{(\omega \omega_0 / Q)^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega \omega_0 / Q)^2} \quad (130)$$

で与えられる。ロックインアンプの帯域幅 $1/(4\tau_p)$ を考慮して、共振周波数付近での雑音の 2 乗平均は

$$\langle V_{\text{noise}}^2 \rangle = k_B T R / \tau_p \quad (131)$$

で与えられる。従って SNR を計算すると

$$\text{SNR} = \frac{i_0 R \delta \phi}{\sqrt{2k_B T R / \tau_p}} \quad (132)$$

となり、 R が大きい方が、すなわち、 Q が高い方が SNR が高くなる。更に、式 (127) の中で $\delta\phi$ は Q に比例するので、 Q が大きくなると感度が飛躍的に良くなる。前に述べたように、離散的なコイルやコンデンサー、抵抗などを組み合わせた回路では Q はあまり大きくならないが、超伝導空洞を利用したり、光共振器を利用した変位、振動センサーでは極めて高い感度が得られている。また、このように、系を記述しているパラメータの変化を外部から励起信号を加えて、大きな変化として取り出すものをパラメトリック型センサーという。

もちろん、抵抗の熱雑音以外にも雑音源は存在する。例えば、電流源に用いられている発振器の雑音、特に、周波数が揺らぐ周波数雑音は大きな影響を持つ。もし、発振器の周波数が $\omega = \omega_0 \rightarrow \omega = \omega_0 + \delta\omega$ になったとすると、共振器の両端の電圧は $\delta\omega$ の一次で近似すると、

$$V(t) \approx Ri_0[\cos \omega t - (2\delta\omega Q/\omega_0) \sin \omega t] \quad (133)$$

となり、位相角の変化量を見ると

$$\delta\phi = \frac{2Q\delta\omega}{\omega_0} \quad (134)$$

と表される。この量と、式 (127) を比較すると、 $\delta\omega$ の影響は Q にはよらないで、

$$\frac{\delta x}{d} = 2 \frac{\delta\omega}{\omega_0} \quad (135)$$

という簡単な関係で決まる（変位 x に換算したときの）揺らぎとなる。この揺らぎが全体の雑音レベルを決めている場合は、いくら Q を高くしても、測定限界は向上されない。このような場合は、上で述べたように、発振器の周波数を負帰還を掛けて安定化する必要がある。

5.4 共振を利用した微小な力の測定法

微小な力を測定する方法として、その力と機械振動子の相互作用によって生じる振動子の共振周波数の変化を測定する方法がある。この方法は、古くはニュートンの万有引力定数を決定するために行われてきた。最近では原子間力顕微鏡に代表される微小な機械プロ - プ（プローブは微小な機械振動子である）を利用した走査型プローブ顕微鏡といわれる装置で、微小な力の測定に利用されている。

図 16 にその概略図を示す。プローブとなる機械振動子の運動方程式は

$$m \left(\ddot{\delta z} + \gamma \dot{\delta z} + \omega_0^2 \delta z \right) = f(x, y, z + \delta z) \quad (136)$$

となる。ここで、 δz は、プローブ振動子の変位である。一番単純な方法では、 x と y を走査しながら、 δz を何らかのセンサーで測定する。共振を利用する方法では、この力を直接測定しない。今、右辺を

$$f(x, y, z + \delta z) = f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z \quad (137)$$

と展開して整理すると、運動方程式は

$$m \left[\ddot{\delta z} + \gamma \dot{\delta z} + \left(\omega_0^2 - \frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \delta z \right] = f(x, y, z) \quad (138)$$

となる。この左辺に注目すると、運動方程式の共振周波数が

$$\omega_0^2 \rightarrow \omega_0^2 - \frac{1}{m} \frac{\partial f}{\partial z}$$

のように変化していることがわかる。そこで、 $f(x, y, z)$ を測る代わりに、振動子の共振周波数の変化を測定して、力の情報、すなわち $\partial f / \partial z$ を得るのである。共振周波数の変化は、外部の基準発振器の信号を利用して振動子を励振するか、振動子自身の共振を利用した自励発振の周波数を計測するなどして測定される。この方法の測定限界は振動子の熱雑音で与えられるので、変位センサーの場合と同様の議論で力の測定限界が与えられる。

万有引力定数の測定では、トーションバランスという非常に共振周波数の低いねじれ振り子を用い、振り子の先端に取り付けた質量と外部に置いた質量の間の重力の大きさを測定している。

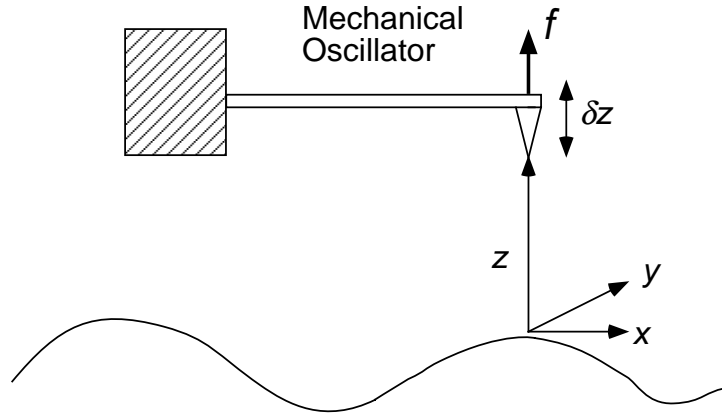


図 16: 原子間力顕微鏡の概念図

6 波形処理

最終的に信号はアナログ - デジタル変換をされ、ある時間間隔 (Δt) でサンプリングされ、計算機に記録される。この記録されたデータを処理することで、更に雑音を取り除くことができる。この処理は非常に柔軟で効果的な場合がある。また、ハードウェアではとても実現できないような理想的な処理を行わせることが可能な場合もある。しかし、それを十分活用するためには、信号と雑音の性質を熟知しておかなければならない。

6.1 サンプリング定理

サンプリングされたデータを扱う場合、必ず考慮しなければいけないこととして Nyquist のサンプリング定理があり [2, 10, 11, 12]、

信号の含む周波数成分がある周波数 (f_c) 以下に限られている時、 $\Delta t \leq 1/(2f_c)$ の間隔でサンプリングされた値から元の波形の情報を完全に再現できる。

と表現されている。この定理は、逆に、あるサンプリング間隔を決めると、信号がそれによって決まる周波数 (ナイキスト周波数、 $f_{\text{Nyquist}} = 1/(2\Delta t)$) よりも高い周波数の成分を含んでいてはならないということの意味している。今、 Δt ごとにサンプリングされた n 番目のデータを $x_n = x(n\Delta t)$ とする。このデータに対しての Fourier 変換を

$$X_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-in\Omega} \quad (\Omega = \omega\Delta t) \quad (139)$$

で定義する。これをみると、 $X_d(\Omega)$ は周期 2π の周期関数であることがわかる。さらにこの逆変換を

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_d(\Omega) e^{in\Omega} d\Omega \quad (140)$$

で定義する。また、本来の $x(t)$ の Fourier 変換を $X(\omega)$ を使って x_n を表すと、

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega') e^{in\omega'\Delta t} d\omega' \quad (141)$$

だから、式 (139) に代入すると

$$X_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega') e^{in\omega'\Delta t} d\omega' e^{-in\Omega} \quad (142)$$

さらに、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta + 2\pi k) \quad (143)$$

という公式を用いると

$$X_d(\Omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\Omega + 2\pi k}{\Delta t}\right) \quad (144)$$

となる。これをみると、サンプリングして作られた Fourier 変換 $X_d(\Omega)$ はもとの連続信号に対する Fourier 変換 $X(\omega)$ を $2\pi/\Delta t$ ごとずらして重ね合わせたものになっている。もし、 $k = 0$ 以外の寄与が 0 ならば、 $X_d(\Omega)$ は $X(\omega)$ と比例係数の除いて一致し、元の情報を完全に再現していることがわかる。 $k = 0$ 以外の寄与が 0 という条件は $|\omega| > \pi/\Delta t$ で、 $X(\omega) = 0$ であることと同値である。これを言葉で表現したものが、最初に述べたサンプリング定理である。また、 $X(\omega)$ を $2\pi/\Delta t$ ずつずらしてものが重なって現れるという (ナイキスト周波数より高い周波数成分の) 影響をエリアシング (aliasing) という。この影響を避けるためには、デジタルサンプリングする前に高い周波数成分をローパスフィルターで除去しておかなければならない。このようなフィルターのことをアンチエリアシングフィルターをいう。従って、測定すべき信号の性質をよく理解し、サンプリング間隔とフィルターの帯域の設計をきちんとやらないと意味のあるデータが取れないので、注意しなければならない。

6.2 FFT

FFT は Fast Fourier Transformation を略したもので、信号のスペクトルを測定するのに幅広く用いられている。FFT は Δt 間隔でサンプリングされた N 個のデータから計算される離散的 Fourier 変換 (DFT)

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W^{nk} \quad (x_n = x(n\Delta t)) \quad (145)$$

及び、その逆変換 (IDFT)

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k W^{-nk} \quad (146)$$

を高速に計算する方法をいう。ここで W は回転係数と呼ばれ

$$W = e^{-2\pi i/N} \quad (147)$$

で定義される。この FFT のアルゴリズムに関しては多くの参考文献があるのでここでは述べない [3, 10, 11, 12]。

例えば、これを用いると雑音のパワースペクトルは式 (13) と式 (145) を見比べて

$$S(\omega_k) \approx \frac{\langle |X_k|^2 \rangle \Delta t}{2\pi N} \quad \left(\omega_k = \frac{2\pi k}{N\Delta t} \right) \quad (148)$$

で計算が可能であることがわかる。ただし、右辺には期待値の計算が含まれているので N 個のデータからなるデータ列を m 組分用意して

$$\langle |X_k|^2 \rangle \approx \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m |X_k^{(l)}|^2 \quad (149)$$

のような平均操作で置き換える必要がある。

本来の Fourier 変換と比較して DFT は

1. 時間領域で Δt 毎の離散的なデータで構成される。
2. 有限の時間でしか測定が行われていない。

という相違点がある。

最初の点はサンプリング定理のところでも述べた通りである。次の点に関しては、実際に測定された有限時間のデータを無限に続く関数 $x(t)$ と

$$w(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & t < 0, t > T \end{cases} \quad (150)$$

となるような窓関数（この窓関数は矩形窓と呼ばれる）との積と考える。そうすると

$$\int_0^T x(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (151)$$

と書くことができるので、有限時間でいった Fourier 変換はその関数と窓関数の積の Fourier 変換を行ったことに同等である。よって

$$X_T(\omega) = \int_0^T x(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega - \omega')X(\omega') \frac{d\omega'}{2\pi} \quad (152)$$

で表されるように、求めたい信号の Fourier 変換 $X(\omega)$ と窓関数の Fourier 変換 $W(\omega)$ 、すなわち

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{-i\omega t} dt \quad (153)$$

の畳み込み積分を行った結果が有限時間の Fourier 変換となる。従って、得られるスペクトルはこの窓関数の影響を受けて歪んでしまう。

ところで、式 (150) で表される矩形窓は不連続関数になるので $W(\omega)$ は大きな裾（サイドローブ）を持ち、信号が完全に周期 T の周期関数以外の場合は大きな歪みを与えるので、一般の測定には適さない。雑音などの測定ではハニング窓と呼ばれる

$$\begin{aligned} w(t) &= \sin^2(\pi t/T) & 0 < t < T \\ &= 0 & t < 0, t > T \end{aligned} \quad (154)$$

がよく用いられる。そのほかにもいろいろな形の窓関数が提案されており、それぞれ特徴がある。測定すべき信号の性質に合わせて、適切な窓関数を選択しなければならない。また、異なる窓関数を用いると雑音に対する帯域幅は異なるので注意が必要である [10, 11]。

生データから FFT を使ってスペクトルを計算する場合様々な処理を行わなければならない。これらの処理を自動的に行ってスペクトルを測定する装置が FFT アナライザと呼ばれるもので、いくつかの市販品がある。このような装置は、測定した信号に対して、適当な前処理を行い、FFT を（専用ハードウェアで）計算する。そして、スペクトルをはじめとする様々な物理量の計測ができる。

6.3 移動平均と積算平均

測定したデータ列から適当な平均処理で雑音を低減できる。その代表的な方法である、移動平均と積算平均について述べる [12]。

今データ列を $\{x_i\}$ とする。このデータに対して

$$y_i = \frac{1}{w} \sum_{j=-m}^m w_j x_{i+j} \quad (155)$$

という量を作る。ここで、

$$w = \sum_{j=-m}^m w_j \quad (156)$$

で定義される規格化定数である。例えば、単純移動平均では $w_j = 1$ となるようにして、部分平均を取る。また、多項式適合では j が i の周りの $\pm m$ の区間、すなわち、 $-m+i \leq j \leq m+i$ の時に

$$y_i = \sum_{k=0}^n a_k (j-i)^k \quad (157)$$

のような n 次の多項式で表されると仮定し、

$$\varepsilon^2 = \sum_{j=-m+i}^{m+i} (x_j - y_j)^2 \quad (158)$$

を最小にするように係数 a_k を決める。ここから、 w_j も決まる。このようにして局所的に当てはめた多項式を微分して平均化微分を計算することも可能である。

この方法で、どの程度雑音が低減できるかは、雑音の性質や平均操作を行う項数に依存する。一般には、 m の大きい方が雑音の低減度は大きくなるが、それに伴って信号にも歪みが現れる。そのあたりをよく考慮し、適当な次数と項数を選択しなければならない。

積算平均は同一条件で繰り返し測定された信号を積算していくことによって平均を採る方法である。すなわち

$$y_i = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N x_i^{(l)} \quad (159)$$

である。ここで、 $x_i^{(l)}$ は第 l 回目の測定で得られた i 番目のデータである。このような方法がうまく行くために、信号は常に同じように表れるという仮定が必要である。もし、繰り返し測定の間に条件が変わると平均によって得られた値は実際のもとは異なる可能性がある。

また、信号が完全に周期的である場合は、その周期ごとのデータを 1 つの測定とみなして、積算を行うことが可能である。これにより、一回の測定ではほとんど何も見えないような状態でも、積算すると正しい信号が見えてくる。

6.4 デジタルフィルタ

サンプリングされたデータに演算を施すことによって、アナログのフィルタのような周波数応答を実現できる。しかし、デジタル信号はソフトウェアで処理されるため、アナログ回路では実現できないような（例えば因果律を破る）ようなものまで可能である。このデジタルフィルタには様々な種類があるのでここですべてを詳しく説明するのは不可能であり、詳しくは適当な文献を参照して欲しい [11]。ここでは一番単純な例を紹介する。

6.4.1 一次ローパスフィルタ

今、データ列 x_n を用いて次の漸化式を作る。

$$y_n = \alpha y_{n-1} + (1 - \alpha)x_n \quad (\alpha < 1) \quad (160)$$

この式の両辺に $e^{-in\Omega}$ を掛けて、 n について $-\infty$ から ∞ まで和をとる。式 (139) の定義に従うと、

$$Y_d(\Omega) = \alpha e^{-i\Omega} Y_d(\Omega) + (1 - \alpha)X_d(\Omega) \quad (161)$$

となる。これから

$$Y_d(\Omega) = \frac{(1 - \alpha)X_d(\Omega)}{1 - \alpha e^{-i\Omega}} \quad (162)$$

であることがわかる。離散系の周波数応答関数を

$$H_d(\Omega) = Y_d(\Omega)/X_d(\Omega) \quad (163)$$

で定義すると、

$$H_d(\Omega) = \frac{(1 - \alpha)}{1 - \alpha e^{-i\Omega}} \quad (164)$$

である。すなわち、式 (160) で表せる演算はこの周波数応答を持つデジタルフィルタを表している。今、 $\Omega = \omega\Delta t \ll 1$ の場合を考えて、 Ω の 1 次で近似すると

$$H_d(\Omega) \approx \frac{(1 - \alpha)}{1 - \alpha(1 - i\Omega)} = \frac{1}{1 + i\omega\alpha\Delta t/(1 - \alpha)} \quad (165)$$

となる。これと、式 (62) で表される周波数応答関数を比較すると、等価的な時定数 $\tau = \alpha\Delta t/(1 - \alpha)$ を持つ 1 次ローパスフィルタと同等な性質を持つと考えられる。これを用いると、演算精度が十分あれば非常に大きな時定数のフィルタを容易に実現できる。

6.4.2 z 変換

前節の式 (163) のような離散系の応答関数を議論するときには、 z 変換と呼ばれる方法を用いる。 x_n , ($-\infty < n < \infty$) に対する z 変換 $X(z)$ は

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \quad (166)$$

で定義される。これは、式 (139) の離散 Fourier 変換で $z = e^{i\Omega}$ とおいたものに等しい。また、この逆変換は

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \oint X(z) z^{(n-1)} dz \quad (167)$$

である。

z 変換は複素関数であり、連続系の Laplace 変換に相当する。デジタルシステムでは、この z 変換を用いて、システムの特性を評価する場合が多い。また、システムの離散インパルス応答関数を用いて、 $x \rightarrow y$ が

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k} x_k \quad (168)$$

で表されるとき、 z 変換を用いると

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (169)$$

という関係となる。

6.4.3 $s - z$ 変換

デジタルフィルタを設計するとき、雛型になるアナログフィルタの応答関数を利用する方法の一つが $s - z$ 変換法である。今、

$$y(t) = \frac{dx}{dt} \quad (170)$$

という関係が成り立っているとす。この両辺を Laplace 変換すると

$$Y(s) = sX(s) \quad (171)$$

が成り立つ。

ここで、式 (170) を差分で近似すると

$$y_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} \quad (172)$$

が得られる。この両辺を z 変換すると

$$Y(z) = \frac{1 - z^{-1}}{\Delta t} X(z) \quad (173)$$

となる。この式と式 (171) を見ると

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{\Delta t} \quad (174)$$

とすればよいことがわかる。このような対応関係を差分近似の $s - z$ 変換法という。 $z = e^{i\Omega}$ を考えると、 $\Omega \ll 1$ の領域、すなわち $\omega\Delta t \ll 1$ ではよい近似を与えるが、周波数が高くなるにつれて特性が劣化する。

差分近似する代わりに、式 (170) の両辺を積分すると得られる

$$\int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} y(t) dt = x_n - x_{n-1} \quad (175)$$

を用いることもできる。ここで、左辺の積分は台形公式で近似すると

$$\frac{\Delta t}{2} (y_n + y_{n-1}) = x_n - x_{n-1} \quad (176)$$

が得られる。これを z 変換すると

$$\frac{\Delta t}{2}(1+z^{-1})Y(z) = (1-z^{-1})X(z) \quad (177)$$

である。したがって、

$$s = \frac{2}{\Delta t} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (178)$$

という関係が得られる。このような対応関係を用いる方法を双一次変換を用いた $s-z$ 変換法という。この方法は、高い周波数でも素直な特性を示す。式 (178) で $s = i\omega_a$ とおいて z について解くと

$$z = \frac{1+i\omega_a\Delta t/2}{1-i\omega_a\Delta t/2} = \exp(i\omega_d\Delta t) \quad (179)$$

となる。ここで、

$$\omega_d = \frac{2}{\Delta t} \tan^{-1}(\omega_a\Delta t/2) \quad (180)$$

である。この関係は、本来のアナログの周波数 ω_a が双一次変換によって、デジタルシステムの周波数 ω_d に変換されることを表している。したがって、この関係を考慮してフィルターの設計をしないといけない。

6.4.4 非再帰型と再帰型フィルター

データ列に線形の関係を与えると線形のデジタルフィルターができる。前に述べた移動平均はまさにデジタルフィルターそのものである。しかし、移動平均はフィルターの出力 y_n が入力側に表れていない。このようなフィルターを非再帰型という。また、インパルス¹⁴を与えると、フィルターの出力は有限個の項しか値を持たない。そのため、有限インパルス応答 (Finite Impulse Resposne, FIR) フィルターと呼ばれる。

それに比較して、式 (160) で表されるようなフィルターは入力に出力の一部が戻っている形をしている。このようなフィルターは再帰型と呼ばれる。また、インパルスを加えた時の応答が無限に残るので無限インパルス応答 (Infinite Impulse Resposne, IIR) フィルターとも呼ばれる。

実用的なフィルターではこれらを組み合わせたものが用いられる。実際に必要な特性を得るための設計法は専門の文献を参考にして欲しい。

課題 8 有限時間で測定した時のパワースペクトルと使用した窓関数の関係を示せ。

有限時間 T で測定した Fourier 変換による雑音のパワースペクトル $S_T(\omega)$ の値は使用した窓関数 $w(t)$ によって異なる。この場合には、式 (152) を用いると本来のスペクトル $S(\omega)$ と窓関数の Fourier 変換 $W(\omega)$ を用いて

$$S_T(\omega) = \frac{\langle |X_T(\omega)|^2 \rangle}{2\pi T} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega - \omega')|^2 S(\omega') \frac{d\omega'}{2\pi} \quad (181)$$

となることを示せ。 T が十分大きい場合は $|W(\omega - \omega')|^2/T$ は比例係数を除くと $\delta(\omega - \omega')$ に近づくと考えられる。その時、 $S(\omega)$ は十分緩やかな関数とすると積分の外に出すことができ (逆にいえば $1/T$ が周波数分解能を与えると考えられる)

$$S_T(\omega) = S(\omega) \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega - \omega')|^2 \frac{d\omega'}{2\pi} = S(\omega) \frac{1}{T} \int_0^T w(t)^2 dt \quad (182)$$

と表されるので、雑音のスペクトルを計算する場合には

$$C_w = \frac{1}{T} \int_0^T w(t)^2 dt \quad (183)$$

という係数で補正をしなければならない。式 (154) で表されるハニング窓の場合の C_w はいくらになるか。

¹⁴ 離散系のインパルスは 関数ではなく、クロネッカーの をいう。つまり、 $x_n = \delta_{n0}$ が時刻 0 で加えられたインパルスを意味する。

課題 9 式 (160) の漸化式に対して、インパルスを加えたときの応答を計算して見よ。

課題 10 次の漸化式で表されるデジタルフィルターの周波数応答関数を求め、特性を評価せよ。また、 β に適当な値を入れてグラフを書き、式 (164) の応答関数と比較せよ。

$$y_n = (2 - \beta)y_{n-1} - \frac{2 - \beta}{2 + \beta}y_{n-2} + \frac{\beta^2}{2 + \beta}x_n \quad (184)$$

7 自作測定器

微小信号を測定しなければならない場合には、市販の測定器では性能が不十分であったり、要求を満たすものは非常に高価であったりして利用できない場合が多い。しかし、演算増幅器 (OP アンプ) IC などを利用すれば、目的に合ったものを自作できる可能性は高い [2, 8, 13]。ここではその例を紹介しよう。

7.1 OP アンプ

自作測定器の主役は OP アンプ IC である。例えば、センサーからの信号は通常は極めて小さいので、ほとんどの場合プリアンプ (Pre-Amplifier) を必要とする。しかも、センサーからの信号線が長いとその部分で雑音を拾う可能性もあり、プリアンプはセンサーになるべく近いところにとりつけた方が望ましい場合が多い。そのような場合には、OP アンプを使った自作のプリアンプが威力を発揮する。

しかし、プリアンプに必要な特性は、そのセンサーの種類と信号の性質に依存している。例えば、

1. 直流信号なのか交流信号なのか
2. 電圧出力なのか電流出力なのか
3. 出力インピーダンスは高いのか低いのか

などがわからないと設計はできない。これらに合わせて、増幅器に用いる OP アンプ IC を選択しなければならない。

市販されている OP アンプ IC も非常に種類が多く選択に困る。しかも、たいいていすべての要求を満たしてくれるわけではない。直流特性はすばらしいが帯域が狭いもの、電圧性雑音は極めて小さいが電流性雑音は大きいもの、などいろいろ個性があるので、目的に合ったものを選ばなければならない。OP アンプの特性としては、

1. 直流特性: 入力オフセット電圧とその温度係数、入力バイアス電流とオフセット電流とその温度係数
2. 交流特性: オープンループゲイン、帯域幅、電圧性雑音、電流性雑音、歪み率、スルーレート、CMRR
3. 絶対規格: 最大電源電圧、最大出力電流、消費電力
4. *etc.*

などが挙げられる¹⁵。

また、OP アンプの内部構造でバイポーラ入力だとか J-FET 入力だとか MOS FET 入力とかの区別がある。これらの構造の違いは上述の特性の違いに表れる。また、低雑音とか高速広帯域とか高精度といった形容詞のついたものもある。これらの違いはあまり明確ではない。各メーカーではセレクションガイドと呼ばれるものを用意して、ニーズに合った IC を選べるような配慮しているので、それを入手して眺めてみるといい。もちろん、複数のメーカーが似て非なるものを作っているのだから、目的にぴったりあったものを探そうとするとかなり時間のかかる仕事になる。表 1 はよく使われるものをピックアップしたものである。ただし、ここに挙げた数字は典型的な値で、その IC のグレードや、測定条件によっても変わるので、詳しい情報は各社の製品カタログや CQ 出版社から出ている規格表を参照して欲しい。

一般に、FET 入力の場合は入力バイアス電流が小さく、インピーダンスの高いセンサー向きであるが、オフセット電圧や温度係数ではバイポーラ入力のものの方が特性が良い。また、雑音特性も FET 入力のものより優れているものが多い。しかし、これらのものはバイアス電流が大きいので大きな抵抗を使うと意味がない。もちろん、超低雑音のタイプの特性を十分に発揮するためには、使用する抵抗の熱雑音を考えないと意味がない。たとえば 100Ω の抵抗の熱雑音は常温で約 $1.3nV/\sqrt{Hz}$ であるから、これより大きな抵抗を入力に用いると意味がない。

7.2 超低雑音増幅器

市販の OP アンプでは特性が不十分な場合には、入力の部分に個別部品を使って、特性を補ってやると非常に良い特性の増幅器を作ることができる。図 17 は低雑音接合型 FET で作ったと低雑音 OP アンプを組み合わせた増幅器の回路図である。こうすると、FET 入力の特性 (高インピーダンス、低バイアス電流) を生かした、超低雑音増幅器ができあがる。この回路では、増幅率は約 300 倍でカットオフ周波数は約 100kHz、

¹⁵ これらの言葉の意味するものはここでは説明しないので文献 [2, 13] を見て欲しい。

表 1: いろいろな OP アンプ IC。ここに挙げる値の詳しい値や条件は各社のカタログを参照

型名	メーカー	種別	V_{off}	I_B	$e_n(nV/\sqrt{Hz})$
LF356	NS	JFET、汎用	3mV	30pA	15
LF411	NS	JFET、汎用	0.8mV	50pA	25
OP07	AD	Bip、高精度	85 μ V	3nA	10
AD795	AD	JFET、高精度	100 μ V	10pA	11
OP27	AD	Bip、低雑音	30 μ V	15nA	3.2
LT1028	LT	Bip、超低雑音	20 μ V	30nA	0.9
AD797	AD	Bip、超低雑音	25 μ V	250nA	0.9
AD743	AD	JFET、低雑音	250 μ V	150pA	2.9
OPA627	BB	difet、低雑音	130 μ V	1pA	4.8
LMC6001	NS	CMOS、超低バイアス電流	1mV	10fA	
OPA128	BB	difet、超低バイアス電流	0.3mV	75fA	27

V_{off} : オフセット電圧、 I_B : 入力バイアス電流、 e_n : 電圧性雑音

メーカー名: NS:ナショナルセミコンダクター、AD:アナログデバイセズ、BB:パーブラウン、LT:リニアテクノロジー

入力換算雑音は 10Hz で約 1.3nV/ \sqrt{Hz} 、1kHz で約 0.95nV/ \sqrt{Hz} である。ただし、個別部品で作られているので、温度環境に敏感で、電圧のドリフトが大きい。また、特殊な使い方のために、発振したりするなどの欠点もあるので、このような回路を使うためには、いくらかの経験や知識が必要であることは否定できない。なお、図中で C_p とあるのはバイパスコンデンサーで、実際には 100 μ F の電解コンデンサーと 0.01 μ F のセラミックコンデンサーを並列に接続したものである。また、 R_G はゲートのバイアス抵抗で、接続するセンサーによって適宜に選ぶ必要がある。この回路ならば 1G Ω 以上でも使える。

7.3 位相検波器

前に述べたように微小信号計測で威力を発揮するロックインアンプであるが、市販されているものは、様々な付加価値がつけられてるので価格も高い。しかし、基本の部分は信号と参照信号の位相検波器（かけ算器）だけで、あとのフィルターの部分（入力側のバンドパスフィルターや出力側のローパスフィルター）は普通の回路工作で十分自作できる。また、位相検波器も IC 化されたものが市販されており、非常に簡単に自作できる。例えば図 18 に示したアナログデバイス社の AD630 という IC は、参照信号の電圧の正負によって増幅器の増幅率を +1 または -1 に切り替えるもので、これにより、信号と矩形波のかけ算を実現できる。この IC はそれに必要な回路をすべて内蔵していて、図 18(b) のように外部で結線すれば位相検波器ができあがるというたいへんに便利なものである。従って、測定器の内部にロックインアンプを組み込む必要がある場合などに有用なものである。

もちろん、アナログ乗算器という IC も売られているが、多くの場合に調整が複雑で、オフセットドリフトが大きいので特殊な場合以外は用いない方がよい。

また、モジュール型のロックインアンプも市販されている。これは、位相検波器以外に、入出力部のフィルター及び、信号と参照信号の位相を合わせる移相器も内蔵されている。

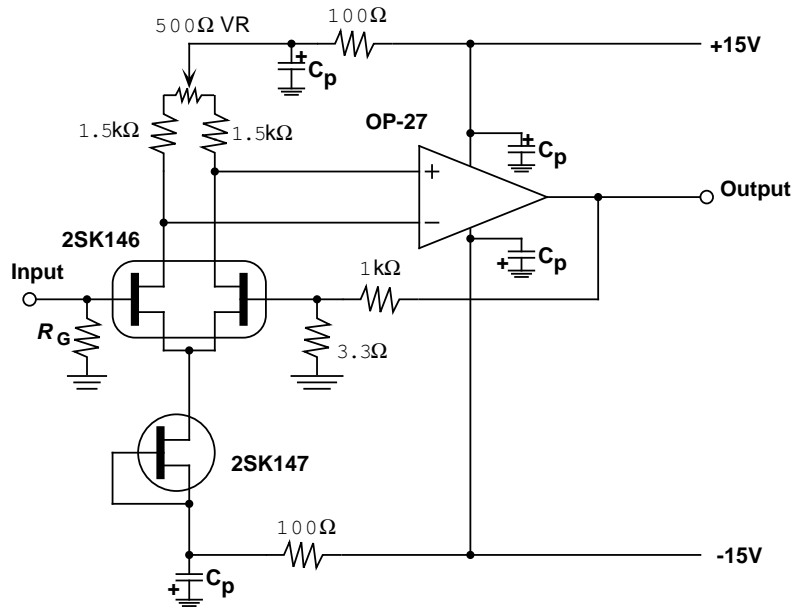


図 17: 超低雑音増幅器の回路図

課題 11 図 19 は OP アンプを用いた反転型増幅器の回路図である。この回路での増幅率と出力の雑音のスペクトルを計算せよ。

回路では OP アンプの雑音（電圧性雑音 e_n 、電流性雑音 i_n ）や抵抗の熱雑音（ e_1 、 e_2 、温度は T ）を考慮すること。さらに、 $R_1 = 10\text{k}\Omega$ 、 $R_2 = 1\text{M}\Omega$ 、 $T = 300\text{K}$ 、 $e_n = 3\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ 、 $i_n = 70\text{fA}/\sqrt{\text{Hz}}$ とすると、出力での雑音のスペクトルはいくらか。一番の雑音源は何か。また、 $R_1 = 100\Omega$ 、 $R_2 = 10\text{k}\Omega$ の場合はどうか。

8 まとめ

微小信号計測というのは、雑多な知識や技術の組み合わせで、一つの筋の通った議論をすることは難しい。それぞれの直面する状況を見ながら、雑音の原因を一つ一つ探し、それを退治していくという地道な努力が一番重要である。ここでは、その基礎になる知識や用語を羅列したに過ぎない。本当に実験に用いるためにはさらに専門的な知識が必要となる。そのような場合は、以下の参考文献などをあたり、理解を深めて対処していただきたい。

最後に、「ノイズは受害者負担」の原則がある。自分の装置に影響が出ない限り、ノイズは世の中にばらまかれているので、被害者は自分のところで原因を突き止めて、それを解決していくしかない。

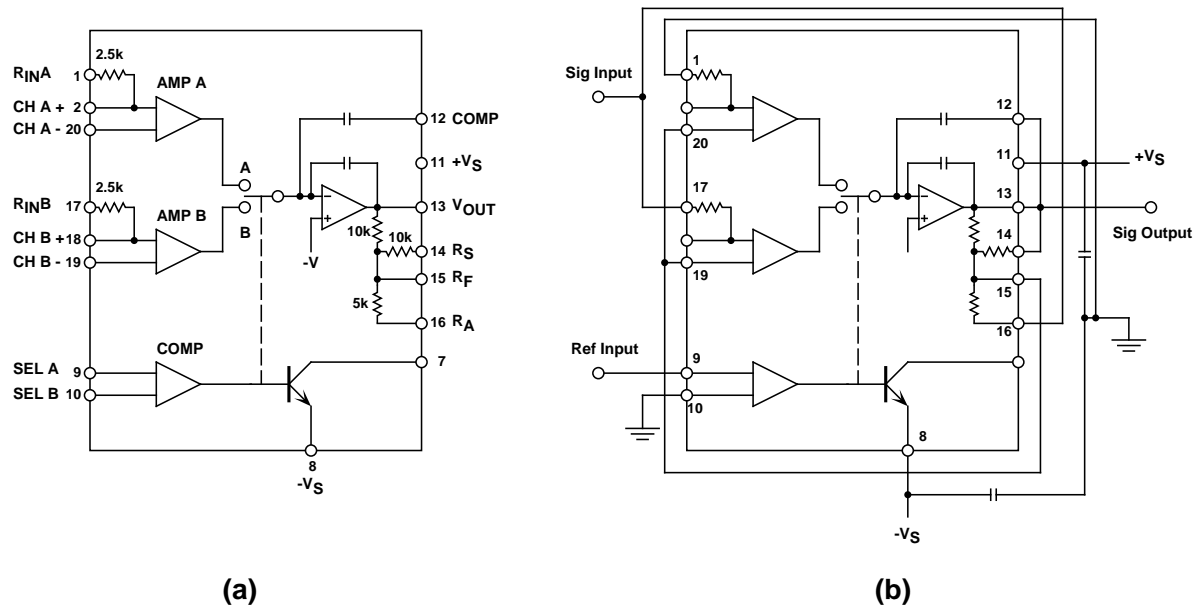


図 18: 平衡変調器 / 復調器 IC、AD630 の内部構成 (a) とそれを利用した同期検波回路 (b)。ここにはオフセット調整用などのピン配置は示されていない。

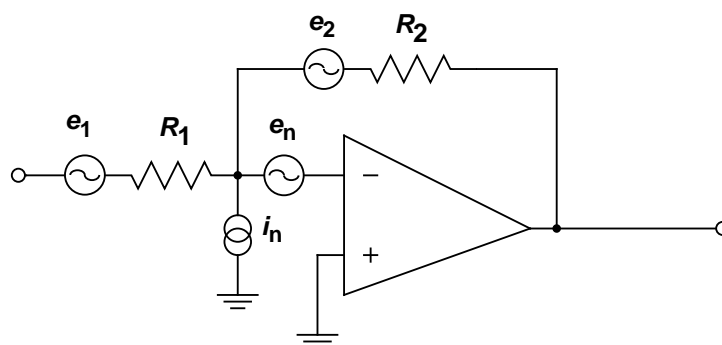


図 19: OP アンプによる反転型増幅器の雑音

参考文献

- [1] 岡村迪夫著、「解析ノイズ・メカニズム」(CQ出版社、1987年): 外来雑音などの侵入経路、アース、電源といったものと雑音の関係を著者の経験を含めて解説したもの。
- [2] 桜井捷海、霜田光一著、「応用エレクトロニクス」(裳華房、1984年): 物理実験に必要なエレクトロニクス技術や雑音、信号計測などを広く解説したもの。
- [3] 日野幹雄著、「スペクトル解析」(朝倉書店、1977年): 雑音などのスペクトル解析の一般論と、FFT及びMEM法によるスペクトル推定の解説書。
- [4] 現代物理学の基礎 [第2版] 5 「統計物理学」(岩波書店、1978年): 統計物理学の本で、ブラウン運動やLangevin方程式など、確率過程の詳しい記述を含んでいる。
- [5] C. キッテル著、斉藤信彦、広岡一訳、「統計物理」(サイエンス社、1977年): 有名な統計物理学の教科書で、第2章は雑音や揺らぎの現象にあてられている。
- [6] A. van der Ziel 著、平野信夫訳、「雑音 源・特性・測定」(東京電機大学出版局、1973年): 電気回路の雑音に関する詳しい解説書。
- [7] 立川巖編著、「FETの使い方」(CQ出版社、1975年): FETの使い方の入門書。
- [8] 山崎弘郎著、「電子回路技術」(東京大学出版会、1977年): 実験を行うときに必要な回路技術をコンパクトにまとめた解説書。
- [9] 中野道雄、美多勉著、「制御基礎理論」(昭晃堂、1982年): 古典的制御理論と現代制御理論を解説した教科書。
- [10] 安居院猛、中嶋正之著、「FFTの使い方」(産報出版、1981年): FFTの解説書で、原理と応用が書かれている入門書。
- [11] 今井聖著、「デジタル信号処理」(産報出版、1980年): デジタル信号処理、特に、デジタルフィルターの入門書。
- [12] 南茂夫編著、「波形データ処理」(CQ出版社、1986年): データ処理の一般的な手法を集めた解説書。
- [13] 岡村迪夫著、定本「OPアンプ回路の設計」(CQ出版社、1990年): OPアンプICの特性、使い方、回路設計の方針などの解説書。