

参考資料 「線形応答系とフーエ変換」

1 線形応答系

物理の実験では、測定を行いたい系に対して外部から刺激（力学系なら外力、電気系なら電気信号）を加え、その応答を調べるといことで系の性質を調べるとい場合がある。この場合の系の振る舞いの一般論を行うのは難しいが、応答が線形の場合には、詳しい議論ができる。このような系は、線形の微分（積分）方程式で記述される。

今、系が線形の演算子 \mathcal{L} によって

$$\mathcal{L}[p(t)] = q(t) \quad (1)$$

という方程式で表されるとする。ここで、 \mathcal{L} が線形とは、

$$\mathcal{L}[p_1(t)] = q_1(t) \quad (2)$$

$$\mathcal{L}[p_2(t)] = q_2(t) \quad (3)$$

が成り立ち、 α 、 β を定数としたら

$$\mathcal{L}[\alpha p_1(t) + \beta p_2(t)] = \alpha q_1(t) + \beta q_2(t) \quad (4)$$

が成り立つ場合である。

2 インパルス応答関数

この線形系の性質（重ねあわせの原理）を用いると、簡単な関数を加えた時の解を求めておけば、それを重ねあわせて任意の関数に対する解（応答）を求めることができる。たとえば、デルタ関数の性質

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t')\delta(t-t')dt' \quad (5)$$

は、時刻 t' に $q(t')$ の大きさのデルタ関数（インパルス）があり、これを重ねあわせたものとして $q(t)$ が表現できることを示している。もし、この線形系のインパルスに対する応答がわかっていれば、重ねあわせの原理により解を求めることができるを示している。

そこで、式 (1) の解を

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t|t')q(t')dt' \quad (6)$$

という形で求めることにする。この両辺に \mathcal{L} を施すと、 $G(t|t')$ は

$$\mathcal{L}[G(t|t')] = \delta(t-t') \quad (7)$$

を満たす必要があることが分かる。式 (7) を見ると、 $G(t|t')$ は、時刻 $t = t'$ に δ 関数によるパルスが入力された時の系の応答と考えることができる。そこで、インパルス応答関数と呼ばれる¹。

求めるべき解は、入力 q と系 \mathcal{L} の2つの性質で決まっている。しかし、基本的でしかも簡単に解が求まる入力を使って系の性質のみを抜き出したものがあれば、それを使って一般的な入力に対する解を求めることができるのである。インパルス応答関数（グリーン関数）は、その一つの例である。

3 簡単な例

一番簡単な例として、抵抗とコンデンサーの直列回路に電圧 $v_i(t)$ の電源を繋ぎ、コンデンサーの両端の電圧 $v_C(t)$ を測定する場合を解く（図1）。この時の方程式は

$$Ri + \frac{q}{C} = v_i, \quad \dot{q} = i, \quad v_C = q/C \quad (8)$$

で、整理すると

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = v_i \quad (9)$$

となる。この解は、定数変化法を用いると簡単に解ける。すなわち、 $v_i = 0$ の時の解、 $v_C = a \exp(-t/RC)$ の a を時間の関数 $a(t)$ として、式 (9) に代入する。すると、

$$RC \frac{da}{dt} e^{-t/RC} = v_i(t) \quad (10)$$

¹この関数 $G(t|t')$ はグリーン関数とも呼ばれる。

が得られる。これは簡単に積分できて

$$a(t) = a_0 + \frac{1}{RC} \int_{t_0}^t v_i(t') e^{t'/RC} dt' \quad (11)$$

となる。だから、

$$v_C(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')/RC} v_i(t') dt' \quad (12)$$

である。ただし、条件は $v_C = 0$ ($t \rightarrow -\infty$) とした。この式をみると

$$G(t|t') = \frac{1}{RC} \theta(t-t') e^{-(t-t')/RC} \quad (13)$$

とすればいいことが分かる。ここで、 $\theta(t)$ は

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (14)$$

で定義される階段関数である。

インパルス応答関数が $t-t' < 0$ で値が 0 となるのはインパルスによる刺激をうけない時は何も起きないという意味である。これは、インパルスが原因になり、その結果として応答が起きるという因果律を表現している。一般に、因果律を満たす系では $t-t' < 0$ で $G = 0$ でなければならない。

もちろん、インパルス応答関数には初期条件を満たすパラメータが無い。したがって、得られる解は特解である。そのため、斉次の方程式 ($\mathcal{L}[p] = 0$) の解を付け加えて、解を構成しないといけない。ただ、因果律を満たす系が定常的な場合は、十分時間が経過すると、初期条件の情報は失われてしまい、入力に対する出力が表れるようになる。物理では、ある入力に対する出力を調べて系の情報を得る、つまり、 q を与えて、 p を測定し \mathcal{L} がどのような性質を持つかを調べる場合が多い。この場合は、初期条件はあまり意味が無いので、特解だけを考慮しておけば十分である。

4 周波数応答関数

この計算では、入力の関数がデルタ関数の重ねあわせで表わすことができるという事実を用いて計算を行った。しかし、実験では、このよ

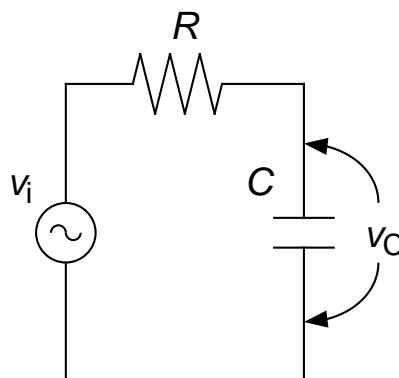


図 1: 抵抗とコンデンサーの直列回路

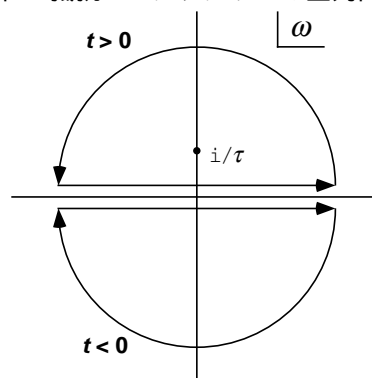


図 2: インパルス応答関数を求める際の積分路。図中の τ は RC で与えられる。

うなインパルスを系に加えて測定を行う場合よりも、正弦関数を加えて測定をする場合が多い。

すなわち、 $q(t) = \exp(i\omega t)$ として、その解が $p(t) = H(\omega) \exp(i\omega t)$ と表わせるとする²。すると、系の性質は $H(\omega)$ という関数 (複素数) で表わされる。たとえば、式 (9) の入力を正弦波とすると

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = e^{i\omega t} \quad (15)$$

で表わされる。この解は $v_C(t) = H(\omega) \exp(i\omega t)$ と置くと

$$(i\omega RC + 1)H(\omega)e^{i\omega t} = e^{i\omega t} \quad (16)$$

だから、

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC} \quad (17)$$

²実際の解は、入力、出力共に実部をとるという約束をする。

となり、解を容易に求めることができる。この $H(\omega)$ は正弦波に対する系の応答を示しているため、周波数応答関数と呼ばれる。しかも、系の記述するパラメータ（ここでは、 R と C ）のみを含み、系を特徴づけるものである。

ただし、このような周波数応答関数はすべての線形系に存在するわけではない。たとえば、ブランコの運動をモデル化して表わす方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L_0}(1 - h \cos \Omega t)x = 0 \quad (18)$$

に対して、 $\exp(i\omega t)$ に比例する正弦的な外力を加えても、解は単純に $\exp(i\omega t)$ に比例する形にならない。これは、系を記述する演算子が陽に時間の関数を含んでいるためである。

この周波数応答関数が存在するための条件は、演算子が定常であることである。すなわち、式 (1) で、 $t \rightarrow t - t'$ のように時間を平行移動した場合にも、同様な関係

$$\mathcal{L}[p(t - t')] = q(t - t') \quad (19)$$

が成り立つ場合である。

これ以降は、系は定常であると仮定する。インパルス応答関数がインパルスに対する応答を表わし、周波数応答関数は正弦波に対する応答を表わしているが、これらは共に系の性質を記述するものであり、独立ではない。その性質を議論する。もし、入力信号がいくつかの正弦波の重ねあわせで表わされているとしよう。すなわち

$$q(t) = \sum Q_n \exp(i\omega_n t) \quad (20)$$

のとき、解は周波数応答関数を用いて

$$p(t) = \sum H(\omega_n) Q_n \exp(i\omega_n t) \quad (21)$$

で表わされる。もし、任意の関数がこのように正弦波の重ねあわせで表わすことができれば、周波数応答関数を用いて、解を表わすことが可能である。この議論を行うためには、フーリエ変換という数学的な手法が必要となる。

5 フーリエ解析

さまざまな実験・計測においては、ほとんどの場合、時間的に変化する信号を測定する。そ

の変化の仕方から必要な情報を取り出し、現象を理解しなければならない。その場合、一番広く行われる方法がフーリエ解析と呼ばれる手法である。ここでは、これについて議論する。

フーリエ解析とは、時間変化する信号をいろいろな周波数の成分に分解する手法である。もし、測定したい信号が、一定の周波数をもつ正弦信号とすれば、測定した信号から、その周波数の信号の成分だけを取り出して解析することにより、よりはっきりとした結果を得ることができる。また、いくつも周波数の信号が重なっている場合には、それぞれの周波数を目印にして、それらを分離できる。また、それによって信号を発生する原因となる物理現象などを知る手がかりを得られる。

このフーリエ解析には、フーリエ級数という数学的手法を用いる。

6 フーリエ級数

今、測定すべき信号 $f(t)$ を、周期 T の周期関数とする³。すなわち、

$$f(t + T) = f(t) \quad (22)$$

が成り立つ。ところで、典型的な周期関数は三角関数である。周期を T とする三角関数は $\cos(2\pi t/T)$ と $\sin(2\pi t/T)$ である。また、 T/n 周期の関数は必ず周期 T の関数になるので、一般には

$$f_N(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + \sum_{n=1}^N B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \quad (23)$$

と書ける。この $f_N(t)$ で $f(t)$ を近似する方法を考える。そこで、最小 2 乗法を用いる。1 周期における 2 乗残差

$$\epsilon^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [f(t) - f_N(t)]^2 dt \quad (24)$$

³このような仮定は、一般性を失うように思えるかもしれない。しかし、実際の測定は有限の時間で必ず終わるから、その時間を周期とする周期関数を考えることにすればこの議論はいつでも成り立つ。

を最小にするように係数を決める。そこで、次の関係を用いる。

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt = \frac{T}{2} \delta_{nm} \quad (25)$$

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt = \frac{T}{2} \delta_{nm} \quad (26)$$

($n \neq 0$)

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt = 0 \quad (27)$$

ここで、 δ_{nm} はクロネッカーのデルタで

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (28)$$

である。これらの関係を代入すると

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt - A_0 a_0 / 2 + A_0^2 / 4 \\ &\quad - \sum_{n=1}^N (A_n a_n + B_n b_n) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (A_n^2 + B_n^2) \end{aligned} \quad (29)$$

と表せる。ここで、

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \quad (30)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \quad (31)$$

である。そして、 ϵ^2 を最小にするためには

$$\frac{\partial \epsilon^2}{\partial A_n} = 0 \rightarrow A_n = a_n \quad (32)$$

$$\frac{\partial \epsilon^2}{\partial B_n} = 0 \rightarrow B_n = b_n \quad (33)$$

が条件となる。もし、 $N \rightarrow \infty$ の時、 $\epsilon^2 \rightarrow 0$ ならばこの級数展開は、平均収束するという。この三角関数による級数は $f(t)$ が区分的に滑らかな関数ならば、その関数が連続な点では一様に収束することが知られていて、フーリエ級数と呼ばれ、 a_n 、 b_n はフーリエ係数という。また、平均収束することも証明されている。

フーリエ級数は複素関数を使っても表現できる。すなわち、

$$c_{\pm n} = (a_n \mp ib_n) / 2 \quad (34)$$

とする。そのとき、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i2\pi nt/T) \quad (35)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-i2\pi nt/T) dt \quad (36)$$

である⁴。

ここで、 $f(t)$ の 2 乗平均を考えると

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (37)$$

$$= \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n^2 + b_n^2) \quad (38)$$

が成り立ち、パーセバルの関係式という。これは信号を周波数成分に分解した時、 $(a_n^2 + b_n^2)/2$ の強度を持っていることを示している。

このような考えにしたがって、信号を基本周波数（この場合には $1/T$ ）とその倍数波の成分に分解する解析は、非常に多くの情報を与えてくれる。また、信号以外のもの（いわゆる雑音）と信号を分離する方法を考えるためにも重要である。

6.1 簡単な例

フーリエ級数の簡単な例をあげる。図 3 は計算に使う波形を示す。

6.1.1 半波整流波形

$$f(t) = \begin{cases} A \sin \omega t & 0 < t < \pi/\omega \\ 0 & \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{cases} \quad (39)$$

で表される波形は、周期 $2\pi/\omega$ の信号である。これは、交流電圧から直流電圧を得るための回路（整流回路）の一番簡単なもので、電圧が正の時だけ電流を取り出す回路を通した時の信号であ

⁴ c_n は複素フーリエ係数と呼ばれる

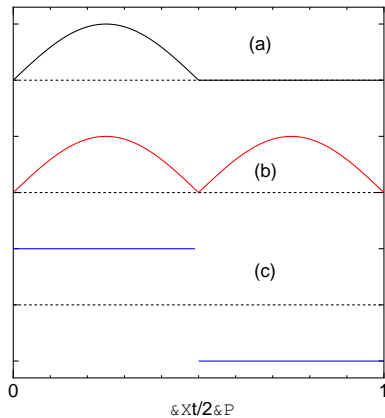


図 3: さまざまな波形 : (a) 半波整流波形、(b) 全波整流波形、(c) 矩形波。

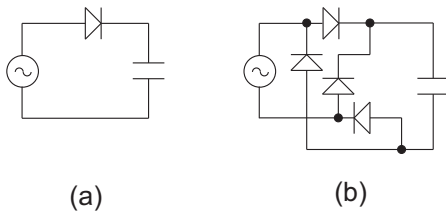


図 4: 整流回路 : (a) 半波整流回路、(b) 全波整流回路。

る。この信号のフーリエ級数を計算してみる。

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} A \sin \omega t \exp(-in\omega t) dt \\
 &= \frac{\omega A}{4i\pi} \left(\frac{e^{-i(n-1)\pi} - 1}{-i(n-1)\omega} - \frac{e^{-i(n+1)\pi} - 1}{-i(n+1)\omega} \right) \\
 &= -\frac{A}{2\pi} \frac{(-1)^n + 1}{(n^2 - 1)} ; (n \neq \pm 1) \quad (40)
 \end{aligned}$$

$$c_{\pm 1} = \pm \frac{A}{4i} \quad (41)$$

これを見ると、整流前の波形は ω の周波数成分しか含まないものが、整流回路を通すと直流 ($n = 0$) 以外にも基本周波数の高調波を含むようになる。高調波成分はコンデンサーを使って十分減衰させる必要がある。このような回路を平滑回路という。回路の構成を図 4(a) に示す。

6.1.2 全波整流波形

$$f(t) = \begin{cases} A \sin \omega t & 0 < t < \pi/\omega \\ -A \sin \omega t & \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{cases} \quad (42)$$

で表される波形は、整流回路でも電圧が正の時はそのまま通し負の時は極性を反転させることで直流を得る回路である (図 4(b) は回路例)。この信号のフーリエ級数は

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} A \sin \omega t \exp(-in\omega t) dt \\
 &\quad - \frac{\omega}{2\pi} \int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega} A \sin \omega t \exp(-in\omega t) dt \\
 &= -\frac{A}{\pi} \frac{(-1)^n + 1}{(n^2 - 1)} ; (n \neq \pm 1) \quad (43)
 \end{aligned}$$

$$c_{\pm 1} = 0 \quad (44)$$

である。半波整流と比べると、基本波の成分がなくなり、ほかの成分は 2 倍になっている。本来、直流電圧を得ることが目的なので、全波整流回路の方が効率がよい。

6.1.3 矩形波

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \pi/\omega \\ -1 & \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{cases} \quad (45)$$

は矩形波を表す。このような不連続な関数でも不連続な点有限個ならばフーリエ級数は収束する。この場合は

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} \exp(-in\omega t) dt \\
 &\quad - \frac{\omega}{2\pi} \int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega} \exp(-in\omega t) dt \\
 &= -\frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{in} \quad (46)
 \end{aligned}$$

で表される。この級数が収束の様子をグラフにしたものが図 5 である。これを見ると不連続な点 ($\omega t = 0, \pi, \dots$) では値が左極限と右極限の平均になっている。これはギブスの現象と呼ば

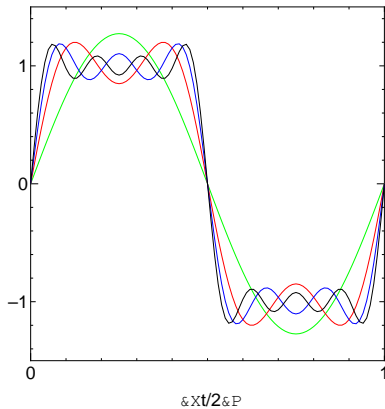


図 5: 矩形波に対するフーリエ級数の収束の様子。

れてるもので、フーリエ級数によって計算される値を $\tilde{f}(t)$ とすると

$$\tilde{f}(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} \quad (47)$$

が一般的に成り立つ。

7 測定時間と周波数分解能

ある測定を行って、その測定時間を T とする。そして、この信号をフーリエ解析するとしよう。この場合には、信号の周期を T と考えることにする。すると、フーリエ級数の周波数間隔は $\Delta f = 1/T$ である。したがって、非常に近い周波数の信号が含まれている場合に、そのピークを分離するためには、その周波数の差の逆数程度の測定時間が必要になる。

8 周波数応答関数とフーリエ級数

ある信号を周波数応答関数 $H(\omega)$ で表される線形系に入力したとする。入力は

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega_0 t) \quad (\omega_0 = 2\pi/T) \quad (48)$$

で表されているとする。このとき、出力は

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(n\omega_0) \exp(in\omega_0 t) \quad (49)$$

で表される。すなわち、各成分ごとに周波数応答関数をかけて級数を計算すればよい。

9 フーリエ級数からフーリエ変換へ

次に、 T が非常に長い場合を考えよう。その時、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\pi nt/T}}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t') e^{-i2\pi nt'/T} dt' \quad (50)$$

という式に対して、 $\omega = 2\pi n/T$ 、 $\Delta\omega = 2\pi/T$ を用いて、和を積分に置き換えると

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} f(t') dt' d\omega \quad (51)$$

が成り立つ。もし、積分の順序交換が可能ならば

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' \quad (52)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (53)$$

が成り立つ。ここで、 $f(t)$ から $F(\omega)$ への変換をフーリエ変換、その逆の $F(\omega)$ から $f(t)$ 変換を逆フーリエ変換という⁵。

10 フーリエ変換の性質

フーリエ変換が存在するためには、積分が収束する必要がある。それを仮定しているいろいろな性質を述べる。

導関数のフーリエ変換

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-i\omega t} dt \\ &= f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f e^{-i\omega t} dt = i\omega F(\omega) \end{aligned} \quad (54)$$

⁵ $1/2\pi$ の因子の付け方や指数関数の符号などは教科書によってまちまちになっているので気を付けること。

のように、元の関数のフーリエ変換に $i\omega$ を掛けたものになる。

積のフーリエ変換

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)G(\Omega)e^{i(\Omega-\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - \Omega)G(\Omega)d\Omega \quad (55) \end{aligned}$$

となる。最後の積分は畳み込み積分と呼ばれる。逆変換の場合には、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')g(t-t')dt' \quad (56)$$

とやはり、畳み込み積分で表わせる。

パーセバルの関係式 式 (56) において $G(\omega) = F^*(\omega)$ で $t = 0$ とすると

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t')|^2 dt' \quad (57)$$

となる。これをパーセバルの関係式という。ここで、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)^* e^{i\omega t} d\omega = f^*(-t) \quad (58)$$

という関係を用いた。

周波数応答関数とインパルス応答関数 周波数応答関数 $H(\omega)$ とインパルス応答関数 $G(t)$ はフーリエ変換で結ばれていて、周波数応答関数がわかれば、逆フーリエ変換により

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (59)$$

でインパルス応答関数を求めることができる。これは、インパルス応答関数による解の表現

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')x(t')dt \quad (60)$$

に $x(t) = e^{i\omega t}$ 、 $y(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$ を代入すると

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')e^{i\omega(t-t')}dt' \quad (61)$$

となることからわかる。

11 フーリエ変換による常微分方程式の解法

考えている系が定常的な場合、フーリエ変換を用いて微分方程式を解くことができる。たとえば、インパルス応答を求める場合に利用できる。インパルス応答は

$$RC \frac{dG}{dt} + G = \delta(t) \quad (62)$$

を満たさなければならない⁶。この式の両辺に $\exp(-i\omega t)$ をかけて、 $(-\infty, \infty)$ で積分するとフーリエ変換の関係に直すことができ、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(RC \frac{dG}{dt} + G \right) e^{-i\omega t} dt = 1 \quad (63)$$

となる。ところで、導関数に対するフーリエ変換の公式、式 (54) を用いると

$$(i\omega RC + 1) \int_{-\infty}^{\infty} G e^{-i\omega t} dt = 1 \quad (64)$$

である。そこで、

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t)e^{-i\omega t} dt \quad (65)$$

とすると

$$(i\omega RC + 1)H(\omega) = 1 \quad (66)$$

となる。ここで、 $H(\omega)$ は $G(t)$ のフーリエ変換で、これを解けば、

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC} \quad (67)$$

である。これは、式 (17) と同じもので、系の周波数応答関数となる。つまり、インパルス応答関数と周波数応答関数はフーリエ変換で結ばれていて、周波数応答関数がわかれば、逆フーリエ変換により

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (68)$$

でインパルス応答関数を求めることができる。

この系の場合の逆変換は

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1 + i\omega RC} d\omega \quad (69)$$

⁶方程式が時間の平行移動に対して不変なので $t - t'$ を t と考えて計算すればよい。

である。この積分は複素関数論にしたがって、複素積分（留数計算）するだけであるが、 t の符号によって、積分路を ω 平面の上半面（ $t > 0$ ）か下半面（ $t < 0$ ）かを変える必要がある（図2）。今、極の位置は i/RC で上半面にあるだけだから、下半面で積分を行う場合は0となり、上半面では留数を計算すると、式(13)と同じ結果が得られる。

前に述べたように、 $H(\omega)$ は、 $v_i = e^{i\omega t}$ とした時、 $v_c = H(\omega)e^{i\omega t}$ となるものである。そして、正弦波を入力したときの、出力の正弦波の振幅と位相を表して、因果律を満たす系では $H(\omega)$ の極は、上半面にしか存在しないことが分かる。

また、 $v_i(t)$ のフーリエ変換を $V_i(\omega)$ とすると、

$$v_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V_i(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (70)$$

$$v_c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) V_i(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (71)$$

と書ける。つまり、 $v_i(t)$ は、 $V_i(\omega)e^{i\omega t}$ という正弦波の重ねあわせで表すことができ、正弦波に対する系の応答が $H(\omega)$ となることがわかってるので、出力はその重ねあわせで書くことができる。この考え方も、インパルス応答を考える場合と同じで入力と系の性質を分けて考えていることになる。さらに、普通の線形系は、有限次数の微分や積分の組み合わせで書かれるため、正弦波に対する応答を求めるのは非常に易しい。つまりフーリエ変換により、微分方程式が代数方程式に変換されるからである。さらに、代数方程式の解から、時間の関数を求める場合は、複素積分を実行することに帰着され、系統的な取り扱いが可能になる。線形系の典型的な例である電気回路では、その特性などについてはこの周波数応答関数で議論される方が多い。

補遺

A 実際のデータのフーリエ解析

次のページを参照。

B ガウス関数のフーリエ変換

ガウス関数のフーリエ変換の計算は、しばしば必要となる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (\alpha > 0) \quad (72)$$

は既知とする。そこで、

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - ikx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha[x + ik/(2\alpha)]^2 - k^2/(4\alpha)] dx \\ &= e^{-k^2/(4\alpha)} \int_{-\infty+id}^{\infty+id} e^{-\alpha z^2} dz \end{aligned} \quad (73)$$

となるが（ $d = k/(2\alpha)$ 、 $z = x + id$ ）、複素関数論を用いると

$$\int_{-\infty+id}^{\infty+id} e^{-\alpha z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (74)$$

が成り立つことが示される。従って、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - ikx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-k^2/(4\alpha)} \quad (75)$$

である。この結果を見ると、ガウス関数のフーリエ変換はガウス関数になることがわかる。

参考文献

- [1] 高橋健人：「物理数学」、新数学シリーズ、（培風館、1958年）。
- [2] 今村勤：「物理とフーリエ変換」（岩波書店、1978年）。
- [3] 今村勤：「物理とグリーン関数」（岩波書店、1978年）。

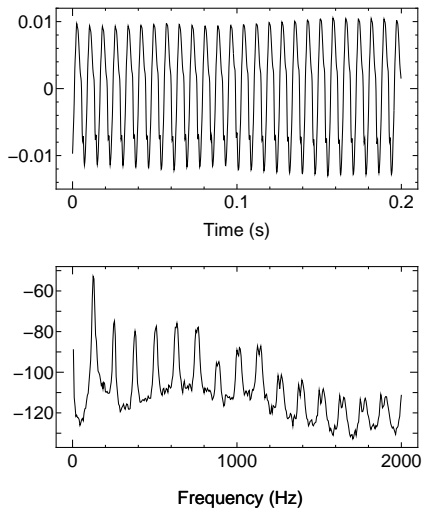


図 6: 三尾の“あ”の時系列データとフーリエスペクトル

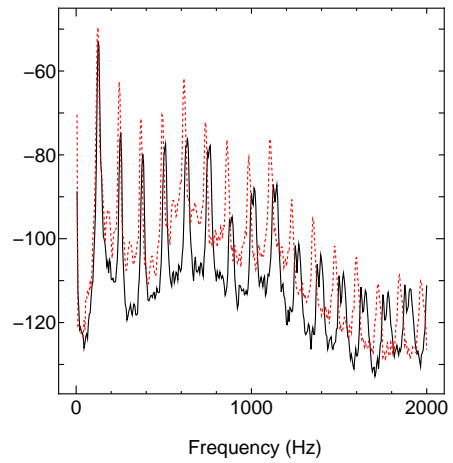


図 8: 2つのフーリエスペクトルの比較

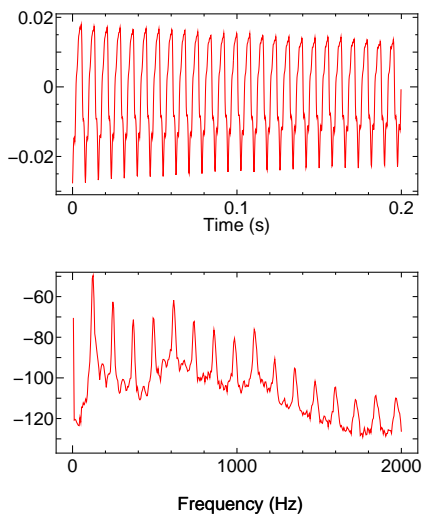


図 7: ある学生の“あ”の時系列データとフーリエスペクトル

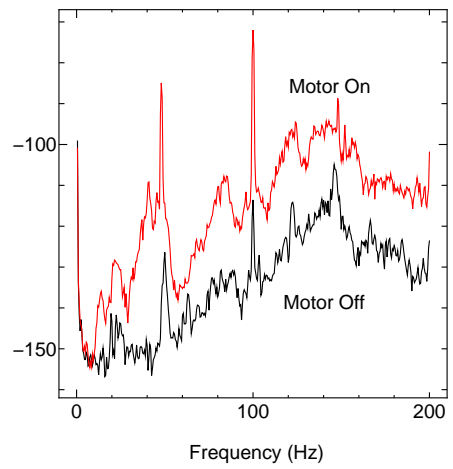


図 9: モーターのオン/オフによるフーリエスペクトルの変化