

物理計測法特論

No.5

第6章:波形処理

第7章:自作測定器

6 波形処理

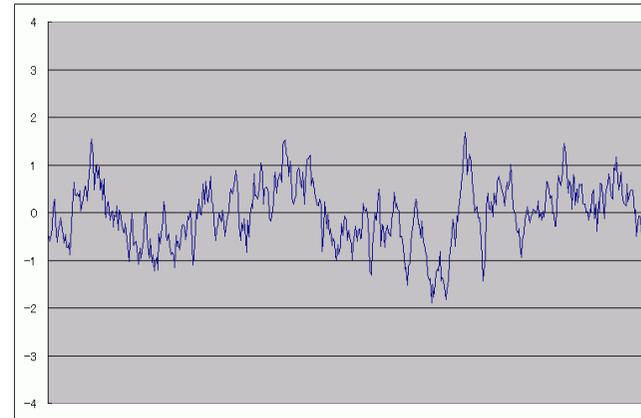
- 測定されたデータは最終的に計算機によってサンプリングされて、デジタル処理される。
 - 有限な時間間隔 Δt でサンプリングされる
 - アナログ-デジタル変換される
- 連続データを扱う場合と異なる

6.1 サンプリング定理

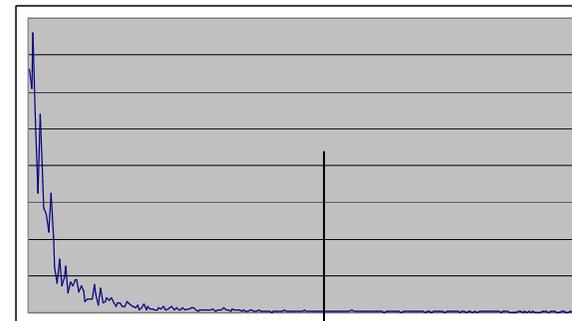
- データをサンプリングする場合に重要なナイキストのサンプリング定理がある。
 - 信号→フーリエ変換する→フーリエ変換の値がある周波数以上では0となる。
 - 最大の周波数を f_{\max} とする。

$$f_{\max} \leq \frac{1}{2\Delta t}$$

ならば、元の波形を再現できる。



時系列



スペクトル

f_{\max}

6.1 サンプリング定理

- 離散データ

$$x_n = x(n\Delta t)$$

- 離散系のフーリエ変換

$$X_d(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-in\Omega} \quad (\Omega = \omega\Delta t)$$

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_d(\Omega) e^{in\Omega} d\Omega$$

- 元々のフーリエ変換

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

- 離散系のフーリエ変換を本来のフーリエ変換で表す。

$$\begin{aligned} X_d(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega') e^{in\omega'\Delta t} d\omega' e^{-in\Omega} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega') d\omega' \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\omega' - \omega)\Delta t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega') d\omega' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(2\pi k + (\omega - \omega')\Delta t) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(2\pi k/\Delta t + \omega) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{2\pi k + \Omega}{\Delta t}\right) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta + 2\pi k)$$

6.1 サンプリング定理

- $X_d(\Omega)$ は $X(\omega)$ を周期 $2\pi/\Delta t$ ごとにずらして、たし合わせたものになっている→エリアシング
- もし、

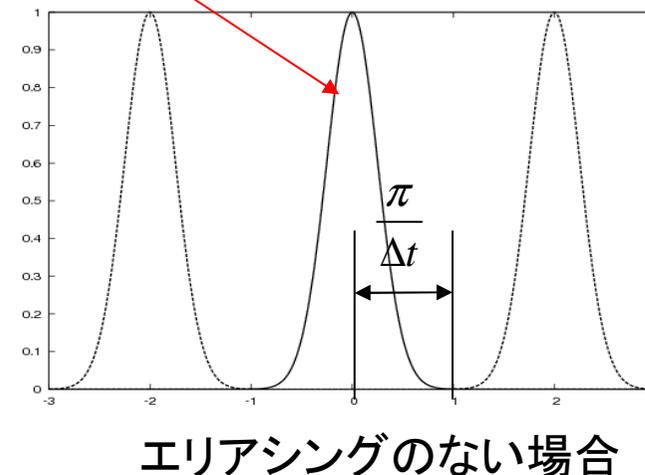
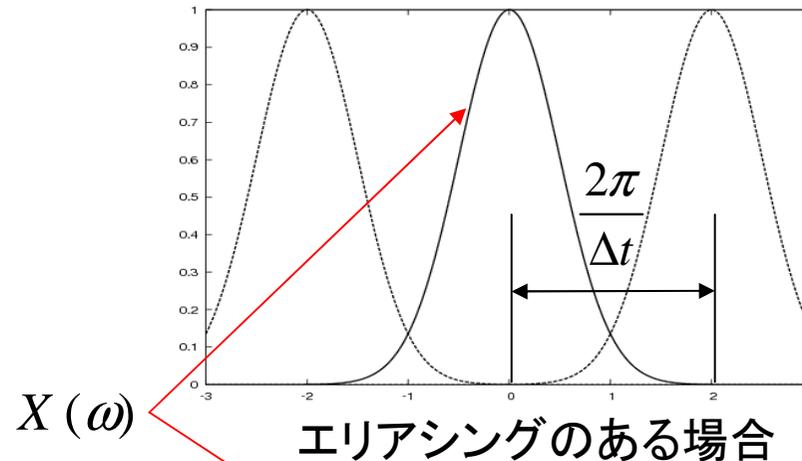
$$|f| \geq \frac{1}{2\Delta t} \rightarrow X(2\pi f) = 0$$

ならば

$$X_d(\Omega) = \frac{1}{\Delta t} X(\Omega/\Delta t)$$

となり、元の関数のフーリエ変換が再現できる→もとの関数を再現できる

Nyquistのサンプリング定理



6.2 FFT

- 実際のデータは、無限に続くことではなく、ある時間間隔で取得した N 個のデータを扱うことになる。
- 周波数も離散化される。

$$X_k = X_d(\Omega_k), \quad \Omega_k = \frac{2\pi}{N}k$$

- 離散的フーリエ変換(DFT)

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\} \rightarrow \{X_0, X_1, X_2, \dots, X_{N-1}\}$$

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W^{nk}$$

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k W^{-nk}$$

$$W = e^{-i2\pi/N} : \text{回転子}$$

- 高速フーリエ変換 Fast Fourier Transformation (FFT)
- DFTを高速に計算するアルゴリズム
- データ数が $N = 2^P$ の時、計算量がかなり減る。

6.2 FFT

- $N=2m$ とする

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n W^{nk} = \sum_{n=0}^{m-1} x_n W^{nk} + \sum_{n=m}^{2m-1} x_n W^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} (x_n W^{nk} + x_{n+m} W^{(n+m)k}) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} (x_n + (-1)^k x_{n+m}) W^{nk} \quad (W^m = -1) \end{aligned}$$

- 偶数次と奇数次で別に和を計算してまとめる

$$\begin{aligned} X_{2p} &= \sum_{n=0}^{m-1} (x_n + x_{n+m}) W^{2np} \\ X_{2p+1} &= \sum_{n=0}^{m-1} (x_n - x_{n+m}) W^n W^{2np} \end{aligned}$$

- 2つの変数列に取り直しをする。

$$X_{2p} = Y_p, \quad y_n = x_n + x_{n+m}, \quad W' = W^2$$

$$Y_p = \sum_{n=0}^{m-1} y_n W'^{np}$$

$$X_{2p+1} = Z_p, \quad z_n = (x_n - x_{n+m}) W^n, \quad W' = W^2$$

$$Z_p = \sum_{n=0}^{m-1} z_n W'^{np}$$

- 計算量を見積もると

$$N \times N \rightarrow \frac{N}{2} \times \frac{N}{2} \times 2 = \frac{N^2}{2}$$

と半分になる。これを繰り返すと最終的に $N \log_2 N$ まで減る

周波数間引き型FFT

6.2 FFT

- $N=4$ のとき

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & -1 & -W \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -W & -1 & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & W & -W \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -W & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} X_0 \\ X_2 \\ X_1 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & W & -W \\ 1 & -1 & -W & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 - x_2 \\ W(x_1 - x_3) \end{pmatrix}$$

6.2 FFT

• $N=8$ のとき

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^{18} & W^{21} \\ 1 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} & W^{24} & W^{28} \\ 1 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} & W^{30} & W^{35} \\ 1 & W^6 & W^{12} & W^{18} & W^{24} & W^{30} & W^{36} & W^{42} \\ 1 & W^7 & W^{14} & W^{21} & W^{28} & W^{35} & W^{42} & W^{49} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & -1 & -W & -W^2 & -W^3 \\ 1 & W^2 & -1 & -W^2 & 1 & W^2 & -1 & -W^2 \\ 1 & W^3 & -W^2 & W & -1 & -W^3 & W^2 & -W \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -W & W^2 & -W^3 & -1 & W & -W^2 & W^3 \\ 1 & -W^2 & -1 & W^2 & 1 & -W^2 & -1 & W^2 \\ 1 & -W^3 & -W^2 & -W & -1 & W^3 & W^2 & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & W & -W & W^2 & -W^2 & W^3 & -W^3 \\ 1 & 1 & W^2 & W^2 & -1 & -1 & -W^2 & -W^2 \\ 1 & -1 & W^3 & -W^3 & -W^2 & W^2 & W & -W \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -W & W & W^2 & -W^2 & -W^3 & W^3 \\ 1 & 1 & -W^2 & -W^2 & -1 & -1 & W^2 & W^2 \\ 1 & -1 & -W^3 & W^3 & -W^2 & W^2 & -W & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_4 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_3 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_2 \\ X_4 \\ X_6 \\ X_1 \\ X_3 \\ X_5 \\ X_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & W^2 & W^2 & -1 & -1 & -W^2 & -W^2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -W^2 & -W^2 & -1 & -1 & W^2 & W^2 \\ 1 & -1 & W & -W & W^2 & -W^2 & W^3 & -W^3 \\ 1 & -1 & W^3 & -W^3 & -W^2 & W^2 & W & -W \\ 1 & 1 & -W & W & W^2 & -W^2 & -W^3 & W^3 \\ 1 & -1 & -W^3 & W^3 & -W^2 & W^2 & -W & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_4 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_3 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_2 \\ X_4 \\ X_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^2 & -1 & -W^2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -W^2 & -1 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x_4 \\ x_1 + x_5 \\ x_2 + x_6 \\ x_3 + x_7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \\ X_5 \\ X_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^2 & -1 & -W^2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -W^2 & -1 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 - x_4 \\ W(x_1 - x_5) \\ W^2(x_2 - x_6) \\ W^3(x_3 - x_7) \end{pmatrix}$$

6.2 FFT

- 有限時間の測定

$$T = N\Delta t$$

- 窓関数

$$w(t) = \begin{cases} 1: |t| < T/2 \\ 0: |t| > T/2 \end{cases} \quad (\text{矩形窓})$$

- 有限時間のフーリエ変換

$$X_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega')W(\omega - \omega')d\omega'$$

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{-i\omega t} dt$$

窓関数のフーリエ変換との
畳み込み積分になる。

- 矩形窓

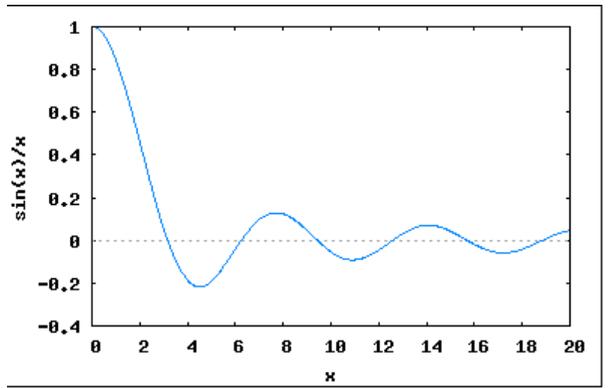
$$W(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega}$$

- 有限の測定時間→窓関数の影響でスペクトルが歪む
- 矩形窓: 中央のピークは鋭いが、裾野の広がりが大きい→歪が大きい→不連続関数であることが問題
- ハニング窓: 連続関数

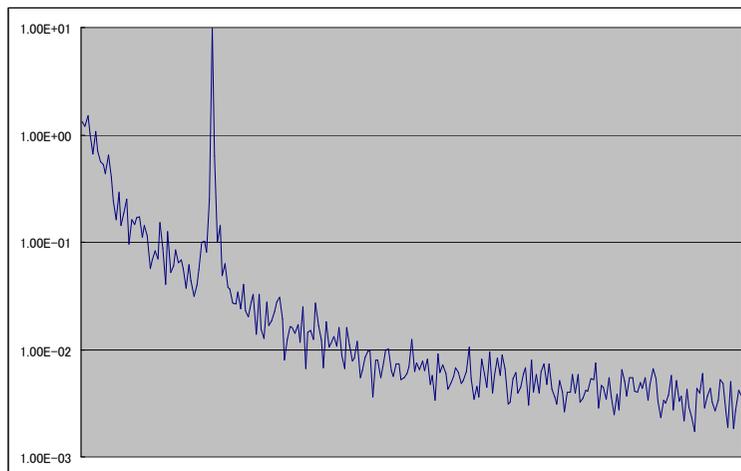
$$w(t) = \begin{cases} \cos^2(\pi t/T): |t| < T/2 \\ 0: |t| > T/2 \end{cases}$$

6.2 FFT

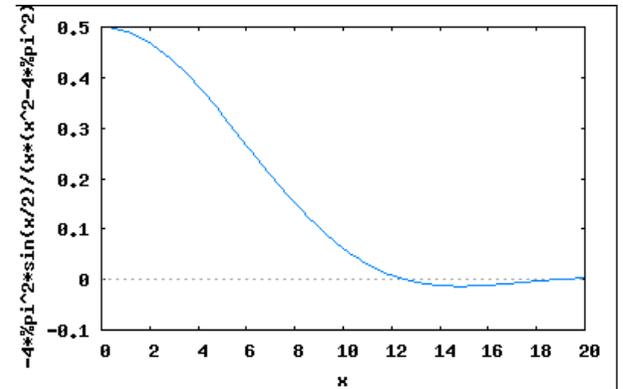
- 矩形窓のフーリエ変換



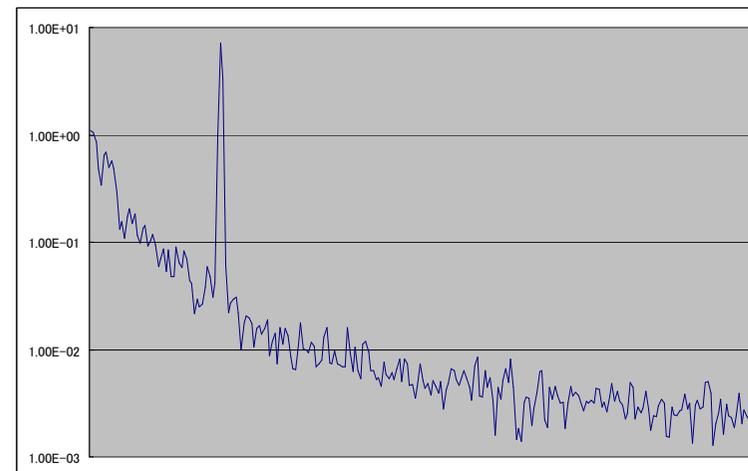
矩形窓によるスペクトル



- ハニング窓のフーリエ変換



ハニング窓によるスペクトル



6.2 FFT

- 雑音に対する窓関数の影響

$$S_T(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \langle |X_T(\omega)|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega - \omega')|^2 S(\omega') d\omega'$$

$$\approx S(\omega) \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega - \omega')|^2 d\omega' = S(\omega) \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} w(t)^2 dt$$

$A_w = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} w(t)^2 dt$ の補正が必要

- 矩形窓:

$$A_w = 1$$

- ハニング窓:

$$A_w = \frac{3}{8}$$

- 雑音は期待値を取って初めて正しい値となる。

- データ列を複数取得

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}^{(1)}$$

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}^{(2)}$$

⋮

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}^{(m)}$$

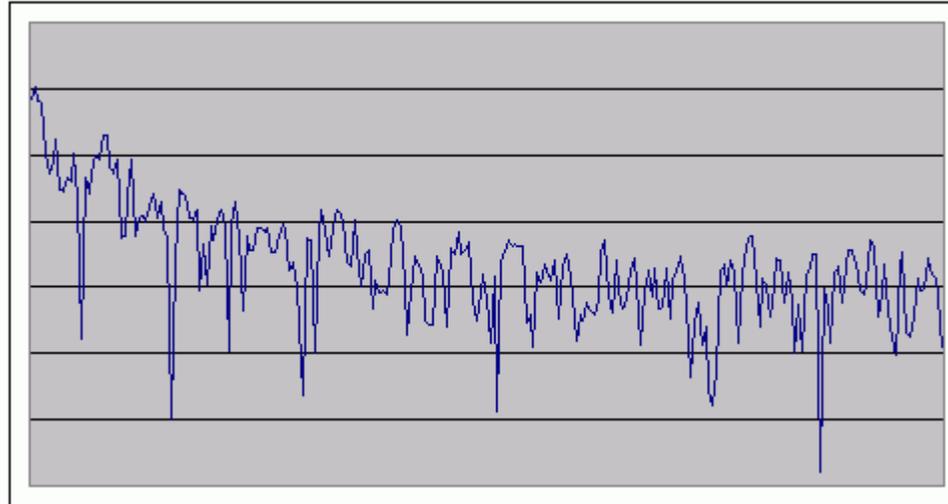
$$X_T(\omega_k) = X_k \Delta t$$

$$S_T(\omega_k) = \frac{1}{2\pi T} \langle |X_T(\omega_k)|^2 \rangle \approx \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \frac{\Delta t}{2\pi N} |X_k^{(l)}|^2$$

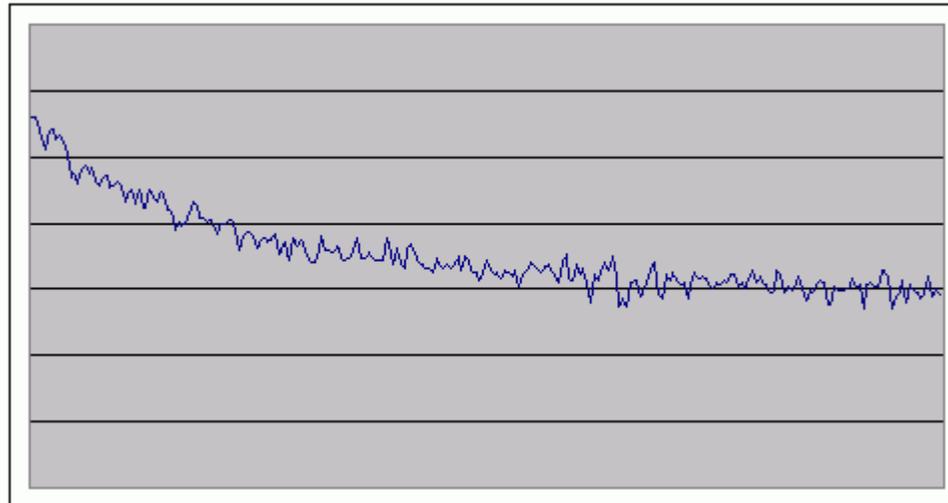
- そのデータ列ごとにフーリエ変換して最後に2乗平均を計算しないといけない。

6.2 FFT

1回ごとのFFTスペクトル

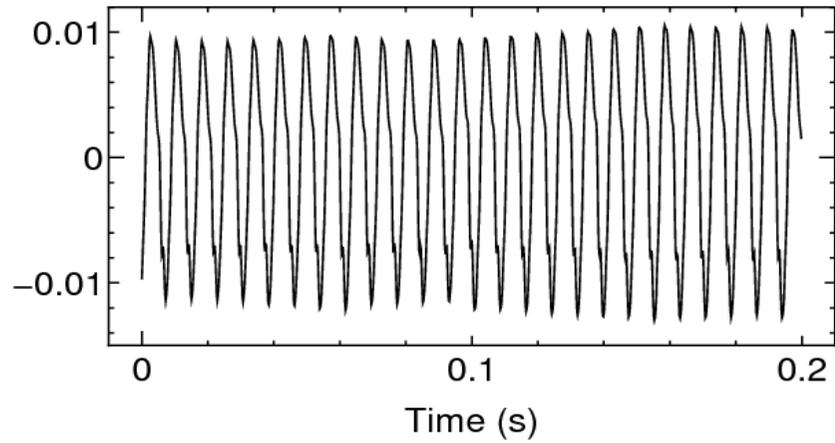


平均のFFTスペクトル
(8回)

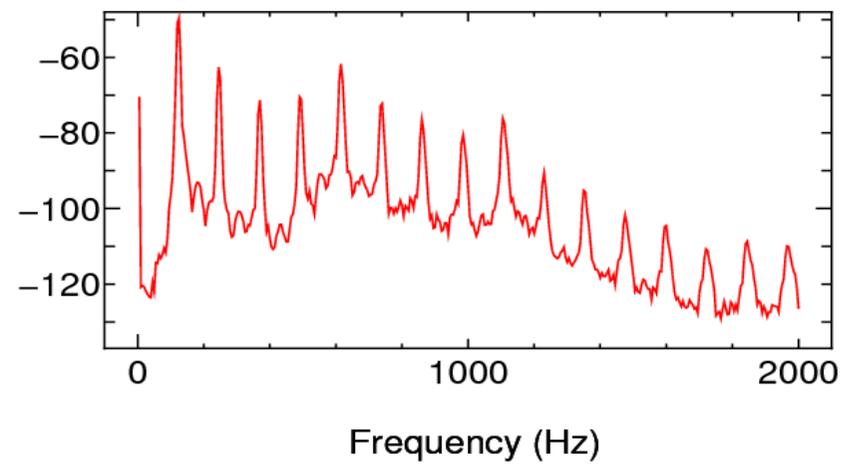
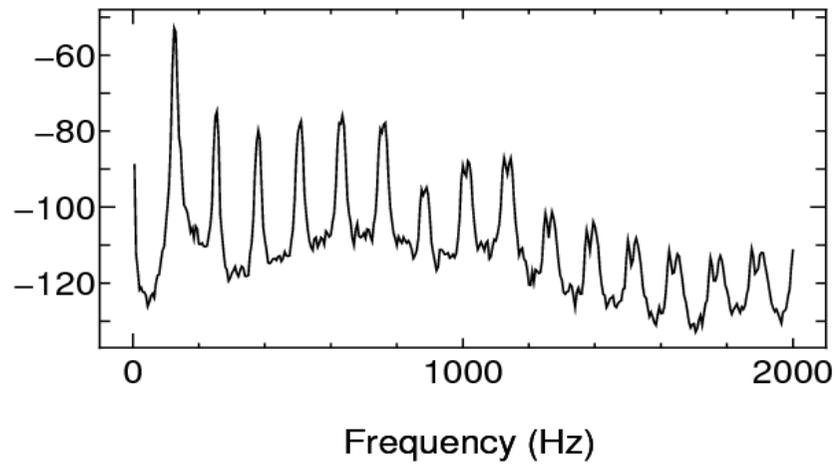
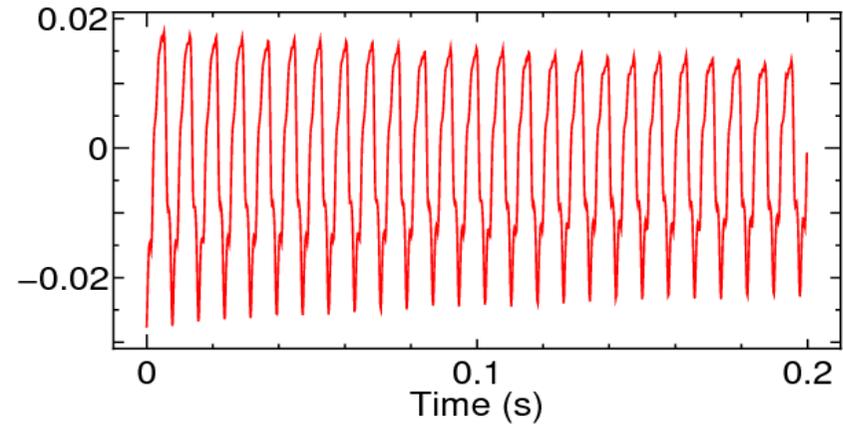


6.2 FFT

三尾の“あ”

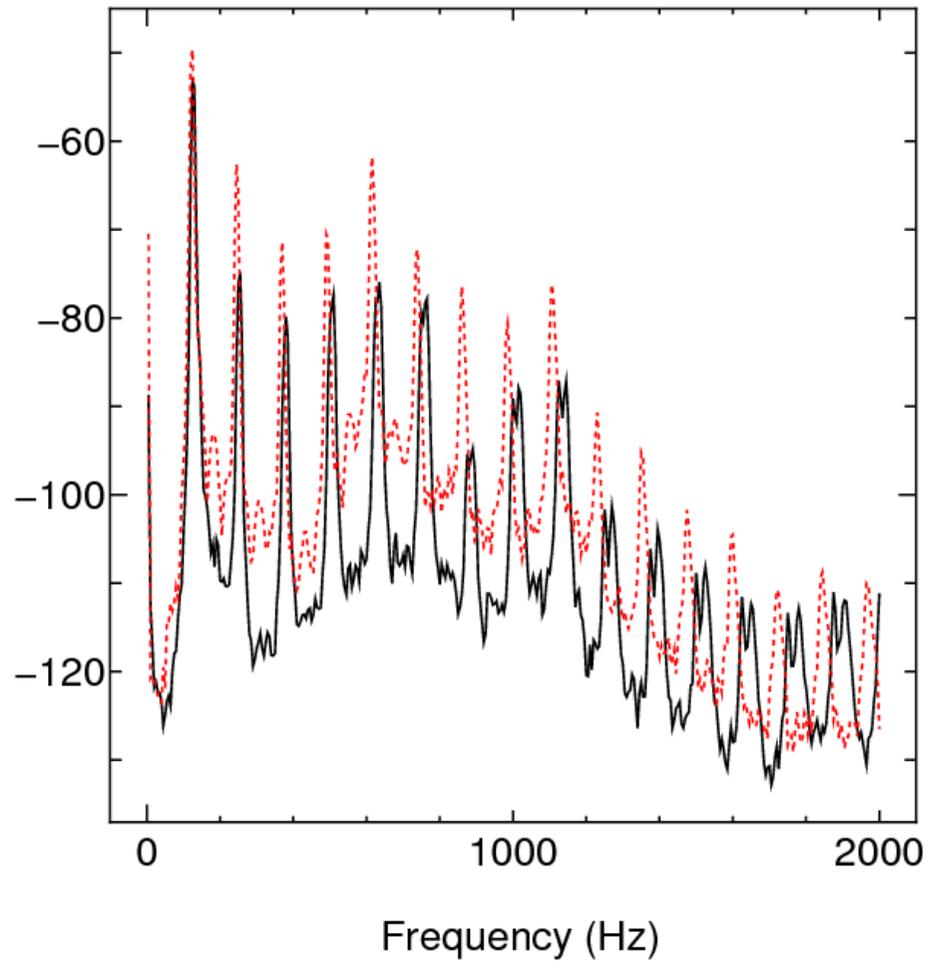


ある学生の“あ”



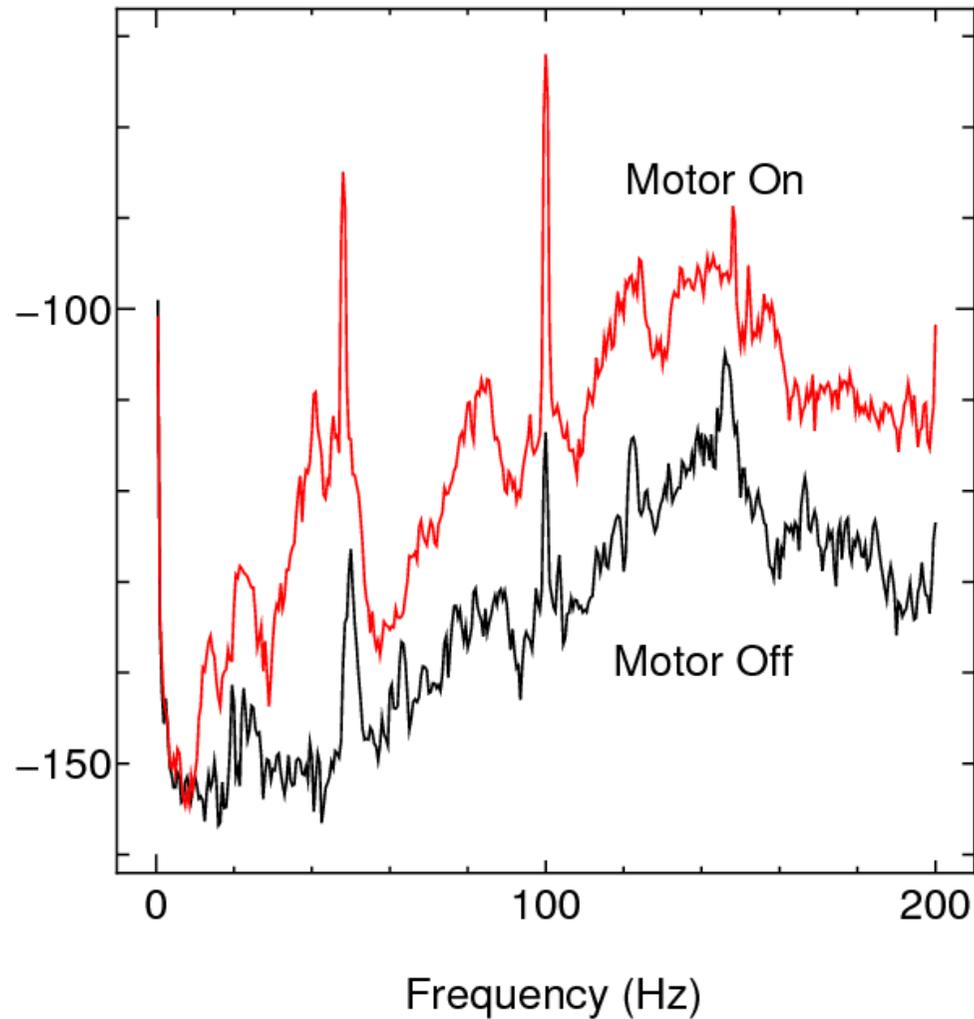
6.2 FFT

2つのスペクトルの比較



基本の周波数が僅かに異なるので高調波になると差が目立つ

6.2 FFT



実験機上でモーターを回転させた時と止めたとき。

基本の振動数成分以外でもスペクトルが持ち上がる。

6.3 移動平均と積算平均

- 移動平均: 取得したデータから、適当な重みをつけて重ね合わせでデータを探す。

$$\{x_i\} \rightarrow \{y_i\}$$

$$y_i = \frac{1}{W} \sum_{j=-m}^m w_j x_{i+j}, \quad W = \sum_{j=-m}^m w_j$$

- 局所的に多項式で近似する。

$$y_j = \sum_{k=0}^n a_k (j-i)^k, \quad \epsilon^2 = \sum_{j=-m+i}^{m+i} (x_j - y_j)^2 \rightarrow \min$$

$$y_i = a_0 : \text{移動平均値}$$

$$\frac{dy}{di} = a_1 : \text{平均化微分値}$$

- $n=2$ の時: $y_j = a_0 + a_1(j-i) + a_2(j-i)^2$

$$\sum_{j=-m+i}^{m+i} x_j = a_0(2m+1) + a_1 \sum_{j=-m+i}^{m+i} (j-i) + a_2 \sum_{j=-m+i}^{m+i} (j-i)^2$$

$$\sum_{j=-m+i}^{m+i} x_j(j-i) = a_0 \sum_{j=-m+i}^{m+i} (j-i) + a_1 \sum_{j=-m+i}^{m+i} (j-i)^2 + a_2 \sum_{j=-m+i}^{m+i} (j-i)^3$$

$$\sum_{j=-m+i}^{m+i} x_j(j-i)^2 = a_0 \sum_{j=-m+i}^{m+i} (j-i)^2 + a_1 \sum_{j=-m+i}^{m+i} (j-i)^3 + a_2 \sum_{j=-m+i}^{m+i} (j-i)^4$$

$$\sum_{j=-m+i}^{m+i} (j-i) = \sum_{j=-m+i}^{m+i} (j-i)^3 = 0,$$

$$\sum_{j=-m+i}^{m+i} (j-i)^2 = S_2 = m(m+1)(2m+1)/3,$$

$$\sum_{j=-m+i}^{m+i} (j-i)^4 = S_4 = m(m+1)(2m+1)(3m^2 + 3m - 1)/15$$

6.3 移動平均と積算平均

$$\sum_{j=-m+i}^{m+i} x_j = a_0(2m+1) + S_2 a_2$$

$$\sum_{j=-m+i}^{m+i} x_j (j-i)^2 = S_2 a_0 + S_4 a_2$$

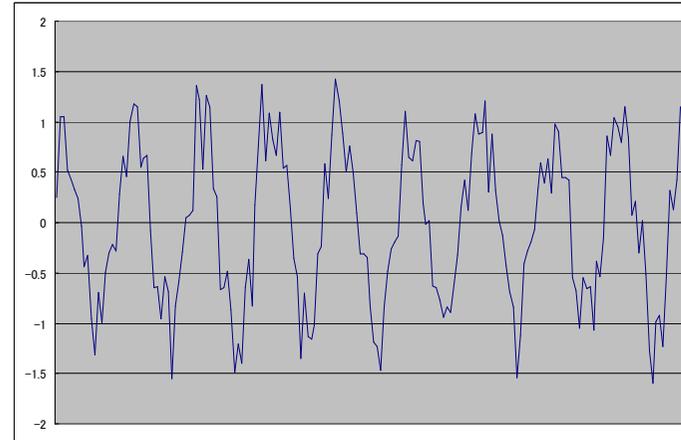
$$a_1 = \frac{1}{S_2} \sum_{j=-m}^m x_{i+j} j$$

$$a_0 = \frac{1}{(2m+1)S_4 - S_2^2} \left(S_4 \sum_{j=-m+i}^{m+i} x_j - S_2 \sum_{j=-m+i}^{m+i} x_j (j-i)^2 \right)$$

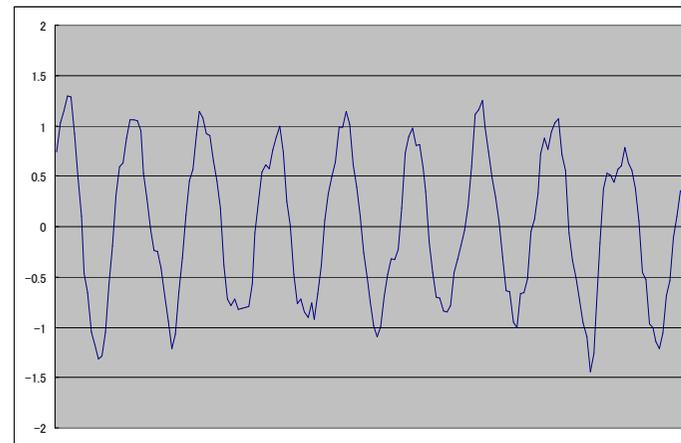
$$w_j = 3m(m+1) - 1 - 5j^2$$

$$w = (2m+1)(2m-1)(2m+3)/3$$

生のデータ



$n=2$ 、 $m=3$ で移動平均したデータ



6.3 移動平均と積算平均

- 信号が周期的な場合、積算平均が有効

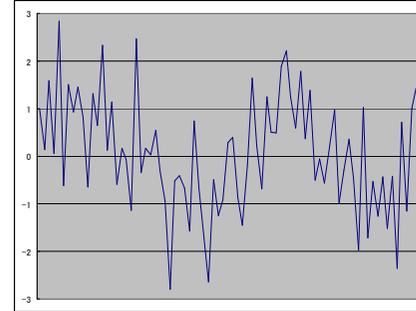
$$x(t + T) = x(t)$$

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(t - kT)$$

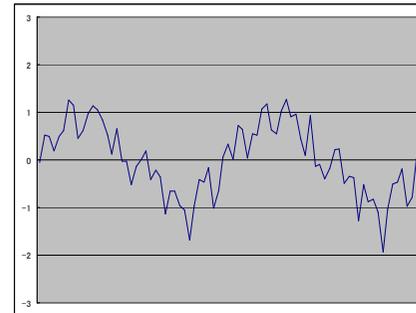
$$H(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-ki\omega T} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-iN\omega T}}{1 - e^{-i\omega T}}$$

$$\begin{aligned} \Delta f &= \int_0^{2\pi/T} |H(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \frac{1}{N^2} \int_0^{2\pi/T} \frac{1 - \cos N\omega T}{1 - \cos \omega T} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{NT} \end{aligned}$$

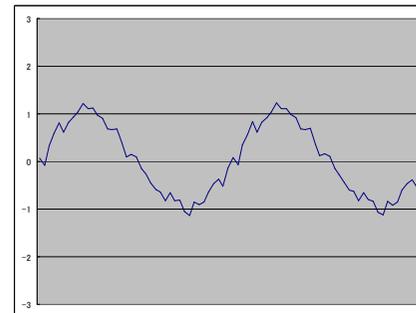
バンド幅は積算回数に反比例する



積算無



N=10



N=100

6.4 デジタルフィルタ

- サンプルされたデータに演算を施すことでアナログフィルタのような機能を実現できる。
- アナログフィルタでは実現しにくいものまで、実現できる。
- 簡単な漸化式

$$y_n = \alpha y_{n-1} + (1 - \alpha)x_n \quad (|\alpha| < 1)$$

- 解は

$$y_n = \alpha^n y_0 + (1 - \alpha) \sum_{k=1}^n \alpha^{n-k} x_k$$

- 離散的フーリエ変換を行う。

$$\begin{aligned} Y_d(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{-in\Omega} = \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_{n-1} e^{-in\Omega} + (1 - \alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-in\Omega} \\ &= \alpha e^{-i\Omega} Y_d(\Omega) + (1 - \alpha) X_d(\Omega) \end{aligned}$$

$$(1 - \alpha e^{-i\Omega}) Y_d(\Omega) = (1 - \alpha) X_d(\Omega)$$

$$Y_d(\Omega) = \frac{(1 - \alpha)}{(1 - \alpha e^{-i\Omega})} X_d(\Omega)$$

$$H_d(\Omega) = \frac{(1 - \alpha)}{(1 - \alpha e^{-i\Omega})} \rightarrow Y_d(\Omega) = H_d(\Omega) X_d(\Omega)$$

$H_d(\Omega)$: 離散系の周波数応答関数

連続系 : 微分方程式

離散系 : 漸化式

6.4 デジタルフィルタ

- 離散系では周波数の範囲はナイキスト周波数以内:
$$-\pi \leq \Omega \leq \pi$$
- この範囲で、周波数応答を考慮することができる→アナログフィルタと同じ。
- 時間領域では
$$h_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\Omega) e^{ik\Omega} d\Omega$$

離散系のインパルス応答関数を用いると

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k} x_k$$
- アナログフィルタと同じように因果律を満たすデジタルフィルタは $h_k=0 (k<0)$ を満たす。
- しかし、一度収録したデータを用いる場合には、必ずしも因果律を満たす必要は無い。
- h_k が有限の項しかないフィルタ: FIR (Finite Impulse Response) フィルタと呼ばれる。
- h_k が無限に続くフィルタ: IIR (Infinite Impulse Response) フィルタと呼ばれる。

6.4 デジタルフィルタ

- 周波数応答関数の絶対値

$$|H_d(\Omega)|$$

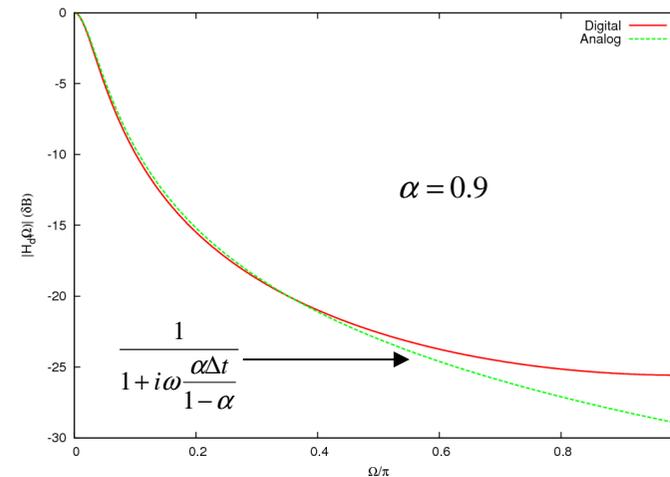
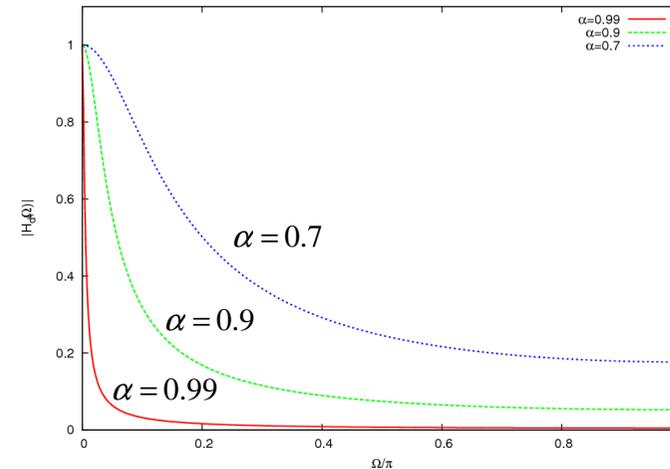
$$\Omega \rightarrow 0 \quad |H_d| \rightarrow 1$$

$$\Omega \rightarrow \pi \quad |H_d| \rightarrow \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \ll 1$$

- 周波数が高くなると値が小さくなる → デジタルローパスフィルタ
- 1次漸化式 → 1次ローパスフィルタ

$$H_d(\Omega) = \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha e^{-i\Omega})} \approx \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha(1-i\Omega))}$$

$$= \frac{1}{1+i\omega \frac{\alpha\Delta t}{1-\alpha}} \rightarrow \tau = \frac{\alpha\Delta t}{1-\alpha}$$



6.4 デジタルフィルタ

- z 変換

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \quad (\text{両側 } z \text{変換})$$

- 逆変換

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

- 畳み込み

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k} x_k$$

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$z = e^{i\Omega}$: 離散的フーリエ変換

- ラプラス変換

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

- 片側 z 変換

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$$

対応関係にある。

6.4 デジタルフィルタ

- s - z 変換: アナログフィルタを雛形としてデジタルフィルタを設計する方法
- s (ラプラス変換) \rightarrow z 変換
- 差分近似法

$$y = \frac{dx}{dt} \rightarrow Y(s) = sX(s)$$

$$y_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} \rightarrow Y(z) = \frac{1 - z^{-1}}{\Delta t} X(z)$$

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{\Delta t} : \text{差分近似法}$$

- 1次ローパスフィルタ

$$H(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

- 差分近似 s - z 変換法

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{\tau(1 - z^{-1})}{\Delta t}} = \frac{1}{1 + \tau/\Delta t} \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \Delta t/\tau} z^{-1}}$$

$$\alpha = \frac{1}{1 + \Delta t/\tau} \quad \text{とした漸化式フィルタと一致する}$$

$$h_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} z^{n-1} dz = \frac{1 - \alpha}{2\pi i} \oint \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^k z^{n-1} dz$$

$$= \begin{cases} (1 - \alpha)\alpha^n & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$$

6.4 デジタルフィルタ

- 双一次変換法

$$\int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} y dt = x_n - x_{n-1}$$

$$\int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} y dt \approx \frac{\Delta t}{2} (y_n + y_{n-1})$$

$$\frac{\Delta t}{2} (y_n + y_{n-1}) = x_n - x_{n-1}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta t}{2} (1 + z^{-1}) Y(z) = (1 - z^{-1}) X(z)$$

$$s = \frac{2}{\Delta t} \frac{(1 - z^{-1})}{(1 + z^{-1})}$$

- 1次ローパスフィルタ

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{2\tau(1 - z^{-1})}{\Delta t(1 + z^{-1})}}$$
$$= \frac{1}{1 + 2\tau/\Delta t} \frac{(1 + z^{-1})}{1 - \frac{1 - \Delta t/2\tau}{1 + \Delta t/2\tau} z^{-1}}$$

分子に z^{-1} があるので、 $\Omega \rightarrow \pi$ の時に振舞いが異なる($H \rightarrow 0$)

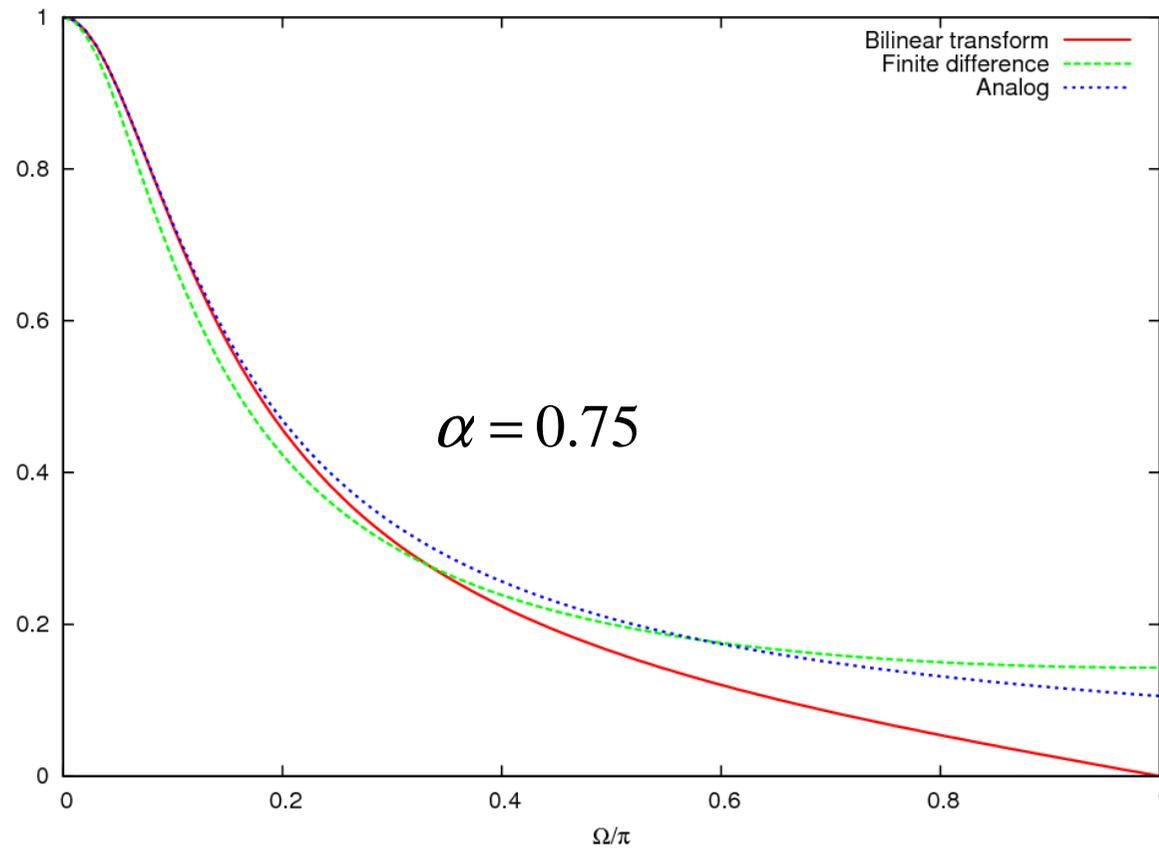
$$s = i\omega_a, z = \exp(i\omega_d \Delta t)$$



$$\frac{\omega_a \Delta t}{2} = \tan\left(\frac{\omega_d \Delta t}{2}\right)$$

6.4 デジタルフィルタ

- 変換方式による違い



7 自作測定器

- 市販の装置
 - 汎用
 - 高性能・高機能（高付加価値）
 - 高価
- 自分の目的にぴったりしたものがない時もある→自作しよう
- OPアンプを使った電気回路は設計が易しい、安定に動く（ただし、低周波数 ≤ 100 kHz）

7.1 OPアンプ

- モノリシックIC
 - 非常に多くの種類が市場に出回る
 - 特性が異なるもの多く、厳しい条件を満たす必要がある場合には、特性を理解して正しい選択をしなければならない
 - 一般的な目的では、汎用品(LF356、LF411など)で十分

7.1 OPアンプ

2001年12月

LF356 JFET 入力オペアンプ

National Semiconductor

LF356

JFET 入力オペアンプ

おことわり：
本データシートは LF155/LF156/LF256/LF257/LF355/LF357 と共通の内容で
あるため、性能特性のグラフやアプリケーション回路図などが LF356 のものと
ない場合があります。ご了承ください。

概要

LF356 は最も早くからある JFET 入力オペアンプで、特性のそ
ろった高利得の JFET を BI-FET™ テクノロジーにより、同一チップ
上に連続的なバインダー・トランジスタとともに集積してあります。
低入力バイアス電流、低オフセット電流、低オフセット電圧、低オ
フセット電圧ドリフトでオフセット調整機能を有しており、これによ
ってドリフトや CMRR が劣化することはありません。また、高スルー
レート、広帯域、超高速セットリング・タイム、低ノイズ電圧電流お
よび低 1/f ノイズコーナを演らすように設計されています。

利点

- 高コストな従来のハイブリッド型やモジュール型の FET オペ
アンプなどをリプレース可能。
- JFET 入力部は、MOSFET に比較して、取り扱いが容易。
- 高、低ノイズ、インピーダンスのいずれでも低ノイズ回路への
応用に最適—超低 1/f コーナを有する。
- オフセット調整時にあがちなドリフトや CMRR の劣下がない。
—他のほとんどのモリシング型では心配がある。
- 新設計の出力段により大容量負荷 (5,000pF) を接続しても安
定動作に問題がない。
- 内部位相補償および差動入力電圧範囲が大きい。

アプリケーション

- 高精度高速積分器
- 高速 DA、AD コンバータ
- 高インピーダンス・バッファ
- 広帯域、低ノイズ、低ドリフト・アンプ
- 利得アンプ
- フォトセル・アンプ
- サンプル・アンド・ホールド回路

LF356 の特長

- 低入力バイアス電流 30pA
- 低入力オフセット電流 3pA
- 高入力インピーダンス $10^{12}\Omega$
- 低入力ノイズ電流 $0.01 \text{ pA}/\sqrt{\text{Hz}}$
- 高 CMRR 100 dB
- 高直流電圧利得 106 dB
- セットリング・タイム (0.01%までの時間) 1.5 μs
- スルーレート 12V/ μs
- 帯域幅 5MHz
- 入力ノイズ電圧 $12 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$

等価回路

BI-FET™、BI-FET IP™ はナショナル・セミコンダクター社の商標です。

2000年8月

LF411 低オフセット低ドリフト JFET 入力オペアンプ

National Semiconductor

LF411

低オフセット低ドリフト JFET 入力オペアンプ

概要

このデバイスには低価格・高速の JFET 入力オペアンプで非常に低
い入力オフセット電圧をもち、入力オフセット電圧ドリフトは保
証付きとなっています。また、低消費電流で、利得帯域幅積及
びスルーレートが高く、更に、JFET 入力回路は高利得で両入力
とも特性がそろっており、非常に低い入力バイアスならびにオフ
セット電流となっています。LF411 は標準品である LM741 とピン・
コンパチブルとなっており、現行の LM741 を使用した回路の総合
特性を容易に向上させる事ができるようになっています。

このデバイスは種々の応用に用いられ、例えば高速積分器、高
速 DA コンバータ、サンプル&ホールド回路等の、低入力オフセ
ット電圧及びドリフト、低入力バイアス電流、高入力インピーダンス、
高スルーレート、及び広帯域を必要とするようなものがあげられま
す。

標準回路

ピン配置図

Dual-In-Line Package

Top View
Order Number LF411ACN, LF411CN
See NS Package Number N08E

特長

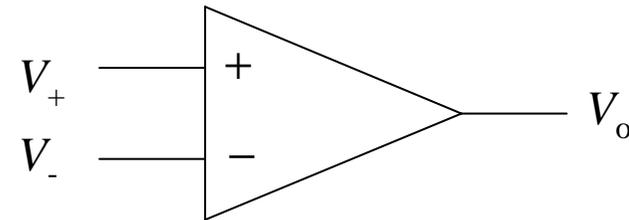
- オフセット電圧、内部調整済み 0.5mV(最大)
- 入力オフセット電圧ドリフト $10 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$ (最大)
- 低入力バイアス電流 50 pA
- 低入力雑音電流 $0.01 \text{ pA}/\sqrt{\text{Hz}}$
- 高利得帯域幅 3MHz(最小)
- 高スルーレート $10\text{V}/\mu\text{s}$ (最小)
- 低消費電流 1.8mA
- 高入力インピーダンス $10^{12}\Omega$
- 低周波歪 $\leq 0.02\%$
- 低 1/f ノイズ・コーナ 50Hz
- 高速セットリング時間 (0.01%) 2 μs

BI-FET IP™ はナショナル・セミコンダクター社の商標です。

7.1 OPアンプ

- 理想的なOPアンプ
 - ゲインが ∞
 - 入力端子に電流が流れない: 入力インピーダンスが ∞
 - 出力電圧は出力電流に無関係に一定: 出力インピーダンスが0
 - オフセットなし
- 存在しない

- 回路図用シンボル

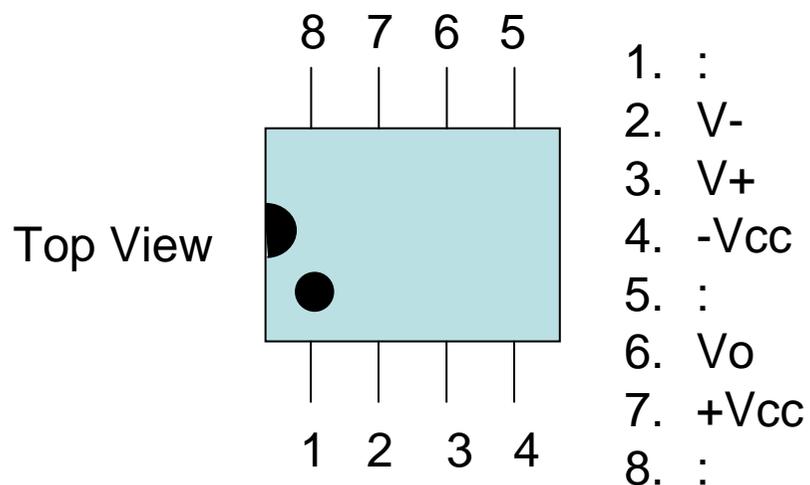


$$V_o = A(V_+ - V_-)$$

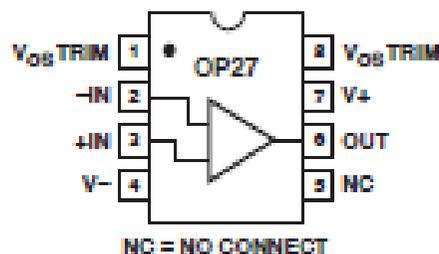
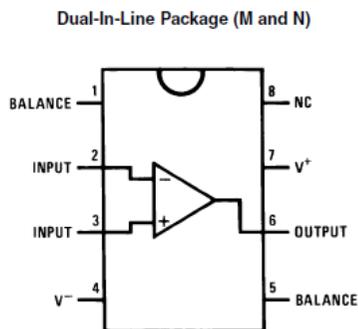
- 実際には電源を配線しないといけない

7.1 OPアンプ

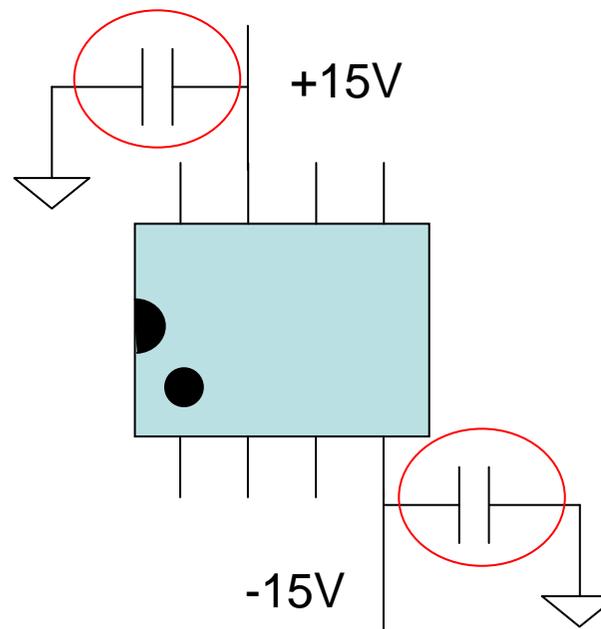
- 8ピンタイプの典型的なピン配置



- 1, 5, 8ピンに何が接続されているかは、個々のICで異なるので注意が必要。
- $+V_{CC}$ 、 $-V_{CC}$ は電源端子で、よく用いられる電圧は $\pm 15V$
- 電源端子にはバイパスコンデンサーをつける必要がある。



Order Number LF356M, LF356MX, or LF356N
See NS Package Number M08A or N08E



7.1 OPアンプ

- 分類
 - 入力デバイス (FET、バイポーラ)
 - 帯域
 - 雑音
 - オフセット
 - ドリフト
 - 安定性
- 目的に合わせて選ぶ
 - 信号源インピーダンス
 - 高: FET
 - 低: バイポーラ
 - 直流信号が交流信号か
 - 直流: 低オフセット・低ドリフト型
 - 交流: 帯域、歪率など
 - 雑音に厳しい条件があるかどうか (熱雑音も考えないといけない)
 - などなど

7.1 OPアンプ

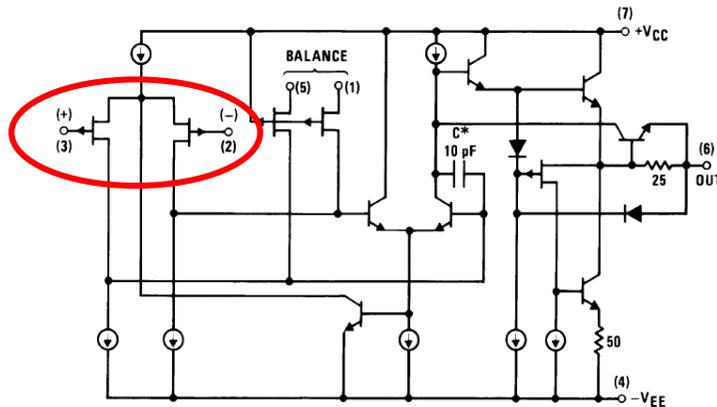
型名	メーカー	種別	V_{off}	I_B	$e_n(\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}})$
LF356	NS	JFET、汎用	3mV	30pA	15
LF411	NS	JFET、汎用	0.8mV	50pA	25
OP07	AD	Bip、高精度	85 μ V	3nA	10
AD795	AD	JFET、高精度	100 μ V	10pA	11
OP27	AD	Bip、低雑音	30 μ V	15nA	3.2
LT1028	LT	Bip、超低雑音	20 μ V	30nA	0.9
AD797	AD	Bip、超低雑音	25 μ V	250nA	0.9
AD743	AD	JFET、低雑音	250 μ V	150pA	2.9
OPA627	BB	difet、低雑音	130 μ V	1pA	4.8
LMC6001	NS	CMOS、超低バイアス電流	1mV	10fA	
OPA128	BB	difet、超低バイアス電流	0.3mV	75fA	27

V_{off} : オフセット電圧、 I_B : 入力バイアス電流、 e_n : 電圧性雑音

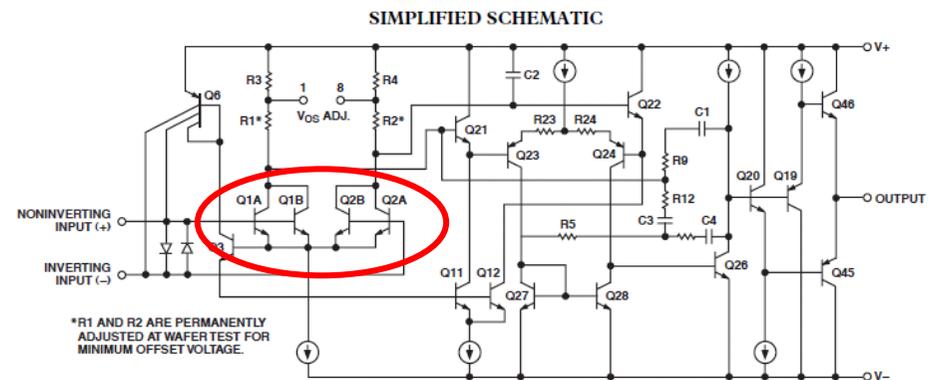
メーカー名: NS:ナショナルセミコンダクター、AD:アナログデバイセズ、BB:バーブラウン、LT:リニアテクノロジー

7.1 OPアンプ

- FET入力 vs バイポーラ入力
 - FET入力は入力インピーダンスが高い
 - しかし、オフセットやドリフトが大きいものが多い
 - 超低雑音型はバイポーラしかない



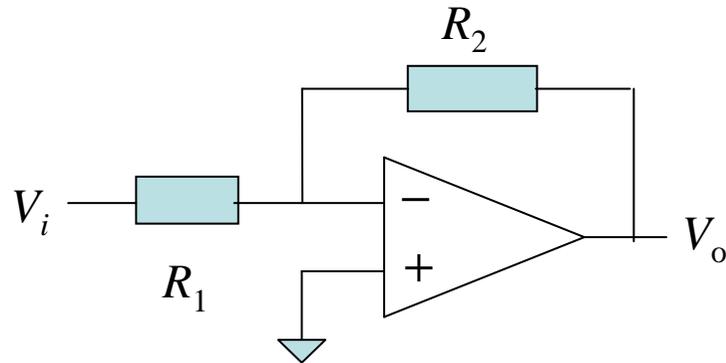
FET入力: LF355



バイポーラ入力: OP27

7.1 OPアンプ

- 回路例: 反転増幅器



$$V_+ = 0, \quad \frac{V_i - V_-}{R_1} = \frac{V_- - V_0}{R_2}$$

$$V_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_0 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_i, \quad V_0 = -A V_-$$

$$G = \frac{V_0}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1 + (R_1 + R_2)/A} \rightarrow -\frac{R_2}{R_1}$$

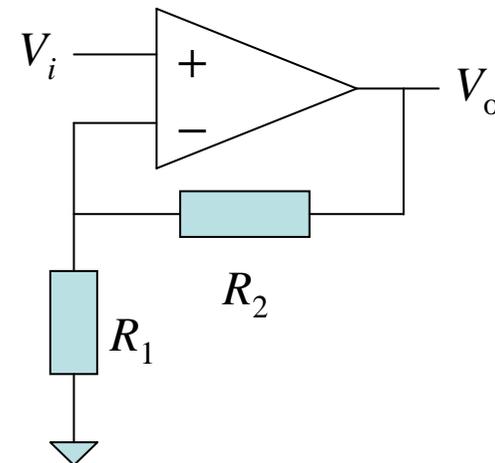
- V_+ が接地されているので

$$V_- \rightarrow 0 (A \rightarrow \infty) \quad \text{仮想接地}$$

- $V_+ = 0$ でないときは、 $V_- = V_+$ で計算する。

- 例: 非反転増幅器

$$V_i = V_+, \quad V_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_0 \rightarrow G = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

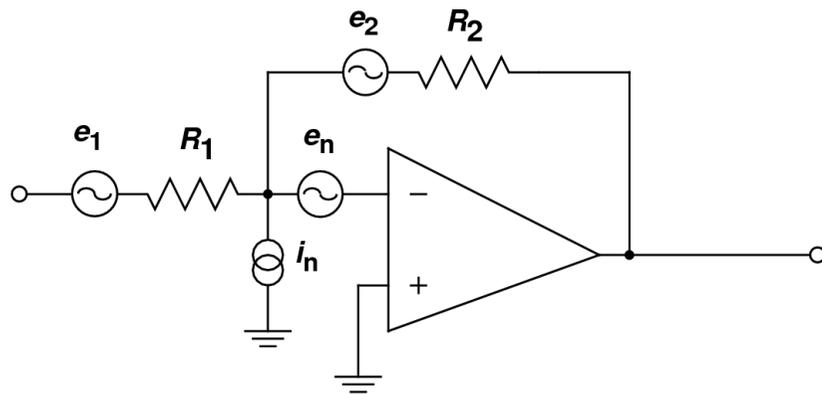


7.1 OPアンプ

- 雑音

$$V_- = V' + e_n \rightarrow 0, \quad \frac{e_1 - V'}{R_1} + i_n = \frac{V' - e_2 - V_0}{R_2}$$

$$-\frac{V_0}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) e_n + \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + i_n$$



- 2乗平均してスペクトルにすると

$$\begin{aligned} \langle V_0^2 \rangle &= \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right)^2 \langle e_n^2 \rangle + \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \langle e_1^2 \rangle + \langle e_2^2 \rangle + R_2^2 \langle i_n^2 \rangle \\ &= \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right)^2 \langle e_n^2 \rangle + 4k_B T R_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + R_2^2 \langle i_n^2 \rangle \end{aligned}$$

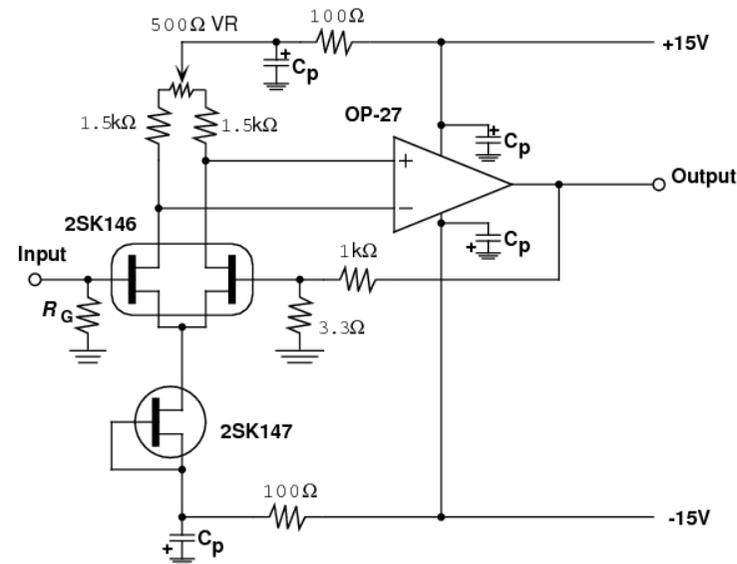
- 入力に換算して

$$\begin{aligned} \langle V_i^2 \rangle &\equiv \frac{1}{G^2} \langle V_0^2 \rangle \\ &= \left(\frac{1}{G} + 1 \right)^2 \langle e_n^2 \rangle + 4k_B T R_1 \left(1 + \frac{1}{G} \right) + R_1^2 \langle i_n^2 \rangle \\ &\approx \langle e_n^2 \rangle + 4k_B T R_1 + R_1^2 \langle i_n^2 \rangle \quad (G \gg 1) \end{aligned}$$

ゲインが十分大きいときは R_1 の値に注意しないといけない

7.2 超低雑音増幅器

- 汎用OPアンプICでは適当なものがない場合、個別部品と組み合わせる。
- 例：高入力インピーダンス、低雑音増幅器
- 初段を低雑音FETで作成する。
- 多少、不安定になるが、市販品には無い性能がでる。
- RGが「かなり高い抵抗でも動作するので、ピエゾ素子やコンデンサー型のセンサー向き



まとめ

- 微小信号計測というのは、雑多な知識や技術の組み合わせで、一つの筋の通った議論をすることは難しい。
- それぞれの直面する状況を見ながら、雑音の原因を一つ一つ探し、それを退治していくという地道な努力が一番重要である。
- 本講義では、その基礎になる知識や用語を羅列したに過ぎない。
- 本当に実験に用いるためにはさらに専門的な知識が必要となる。