物理計測法特論
No.4

第5章：共振現象の利用

5. 共振現象の利用

- 共振：幅広い分野の現象
  - 力学系
  - 電気系
  - 光学系
  - 量子系
- 物理的な構造を反映する→スペクトロスコピー
- 小さな変化が拡大されて見える→計測法への応用

5.1 共振系

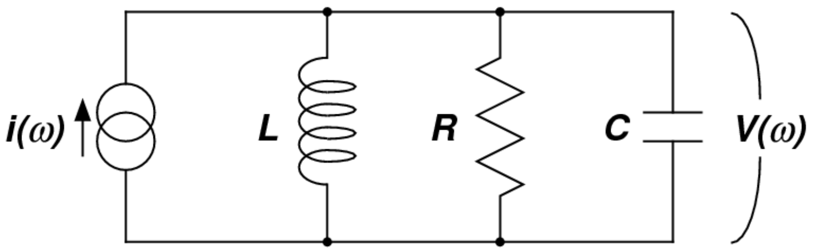
- 電気回路

インピーダンス： $Z(\omega) = V(\omega) / i(\omega)$

アドミッタンス： $Y(\omega) = 1 / Z(\omega)$

$$V_L = L \frac{di}{dt} \to Z_L(\omega) = i\omega L$$

$$V_C = \frac{1}{C} \int i dt \to Z_C(\omega) = \frac{1}{i\omega C}$$



- LCR並列共振回路
  - 全体のアドミッタンス

$$Y(\omega) = \frac{1}{i\omega L} + \frac{1}{R} + i\omega C$$

  - 全体のインピーダンス

$$Z(\omega) = \left(\frac{1}{i\omega L} + \frac{1}{R} + i\omega C \right)^{-1}$$

$$= \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC + i\omega L / R}$$

5.1 共振系

- 定電流源で駆動：Zの大きさが出力電圧

$$Z(\omega)=\left|Z(\omega)\right|e^{i\phi(\omega)}$$

$$\left|Z(\omega)\right|=R\frac{\omega_0\omega/Q}{\sqrt{({\omega_0}^2-\omega^2)^2+\omega^2{\omega_0}^2/Q^2}}$$

$$\phi(\omega)=\tan^{-1}\frac{({\omega_0}^2-\omega^2)Q}{\omega\omega_0}$$

- 共振周波数

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- Q値

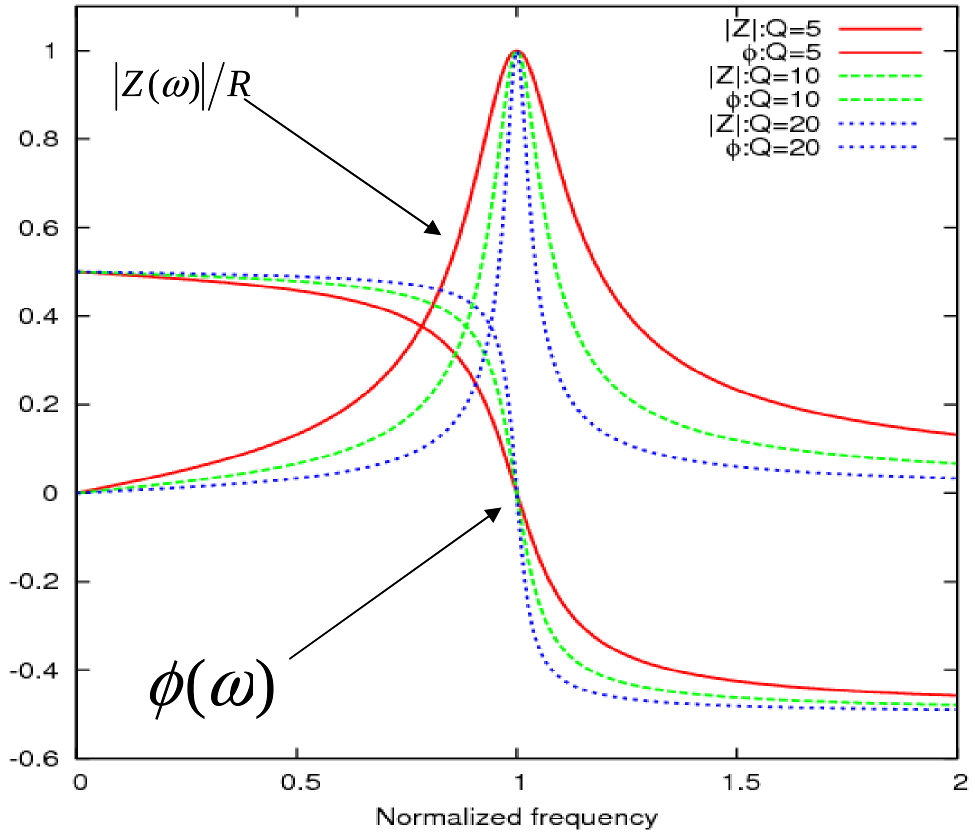
$$Q=\frac{R}{L\omega_0}=R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

- 線幅（FWHM）：中心の値から振幅の2乗は半分になる周波数幅

$$\Delta\omega=\frac{\omega_0}{Q}$$

5.2 High-Q 共振器

- Qの高い共振系:
  - 共振幅が狭く鋭い共振
  - 位相変化が急峻
- Qを決める原因
  - 共振系に存在する損失
- High-Q 共振器
  - LCR: 10-100
  - 機械系: 10^3-10^9
  - 単結晶@低温: 10^8-10^9
  - 超伝導空洞: 10^9



5.1 共振系

- 共振系の自由減衰

$$x(t) = Ae^{-\gamma t/2}\sin(\omega_0 t + \phi_0)\ (\gamma = \omega_0 / Q,\ Q >> 1)$$

$$E(t) \propto \overline{x^2} = \frac{1}{2}A^2 e^{-\gamma t}$$

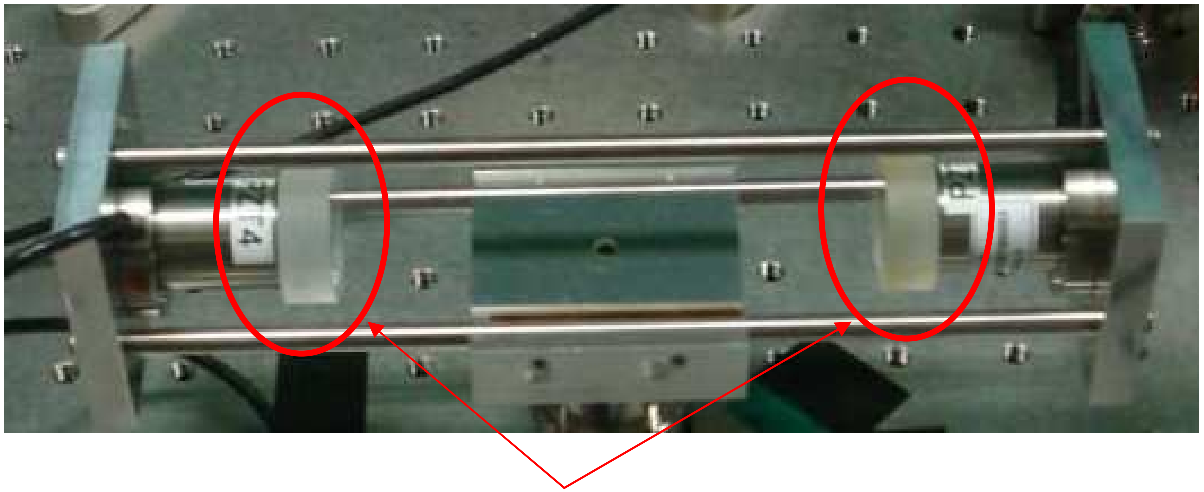
- 1周期の間のエネルギー変化

$$\frac{\Delta E}{E} = 1 - \exp\left(-\gamma\frac{2\pi}{\omega_0}\right) = \frac{2\pi}{Q}$$

- Q:エネルギー損失の逆数となる

5.2 High-*Q* 共振器

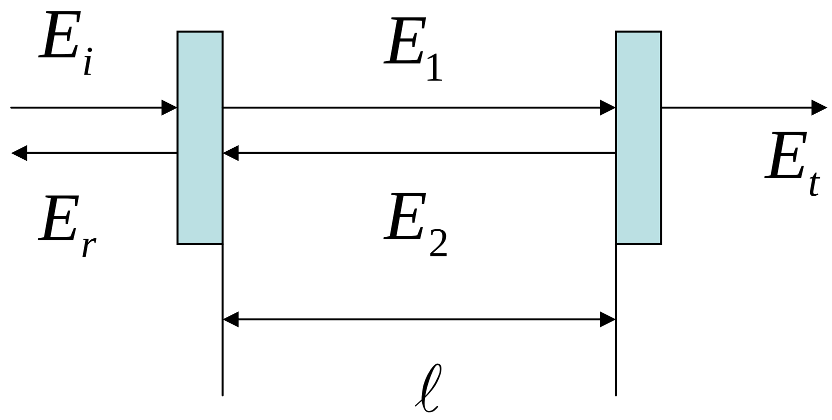
- レーザー光：理想的な正弦波に近い電磁波
- 光共振器：内部に光を閉じ込め、共振させる。これを利用すると非常に高感度な計測が可能になる。
- 代表例：Fabry-Perot型→2枚の鏡を向かい合わせて設置したもの



鏡

5.2 High-Q 共振器

- 光共振器(Fabry-Perot共振器)



$$E_i = e^{i\omega t}$$

$$E_r = -rE_i + tE_2$$

$$E_1 = tE_i + rE_2$$

$$E_t = tE_1 e^{-ik\ell}$$

$$E_2 = rE_1 e^{-i2k\ell}$$

$$k = \omega / c$$

$$\frac{E_r}{E_i} = -r + \frac{rt^2 e^{-i2k\ell}}{1 - r^2 e^{-i2k\ell}}$$

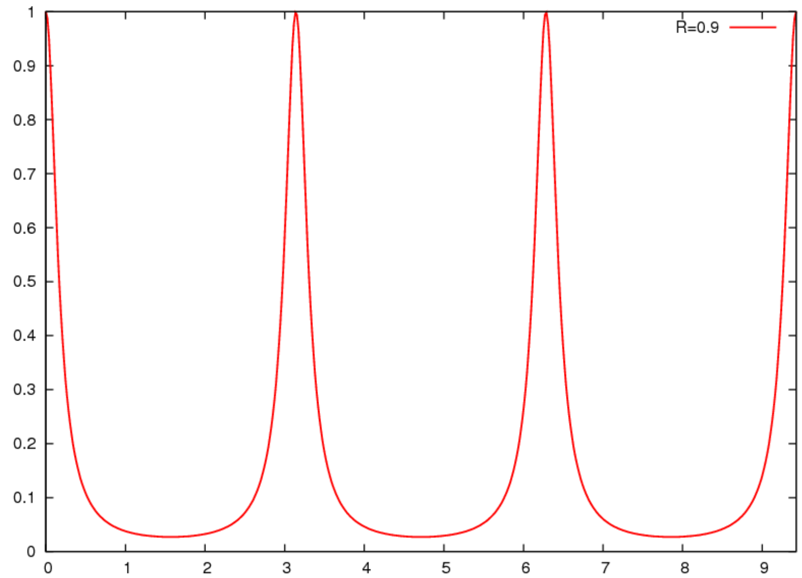
$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{t^2 e^{-ik\ell}}{1 - r^2 e^{-i2k\ell}}$$

5.2 High-Q 共振器

- 透過光強度

$$I_t = \left|\frac{E_t}{E_i}\right|^2 = \frac{T^2}{1+R^2-2R\cos(2\ell k)}$$

$$= \frac{T^2}{(1-R)^2}\frac{1}{1+\dfrac{4R}{(1-R)^2}\sin^2 k\ell}$$



$$T+R=1, \quad 1-R \ll 1$$

$$k\ell = n\pi + \varepsilon$$

$$2\pi\nu_{\mathrm{FSR}}\ell/c = \pi \to \nu_{\mathrm{FSR}} = \frac{c}{2\ell}$$

$$I_t = \frac{1}{1+\dfrac{4R}{(1-R)^2}\varepsilon^2}$$

$$\frac{4R}{(1-R)^2}\varepsilon^2 = 1 \to \varepsilon = \frac{1-R}{2\sqrt{R}}, \varepsilon = \pi\Delta\nu\ell/c \to \Delta\nu = \frac{(1-R)c}{2\pi\ell\sqrt{R}}$$

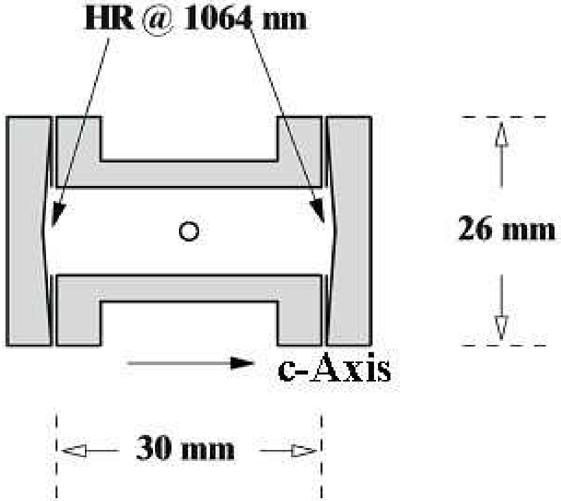
フィネス $\quad \Im = \dfrac{\nu_{\mathrm{FSR}}}{\Delta\nu} = \dfrac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$

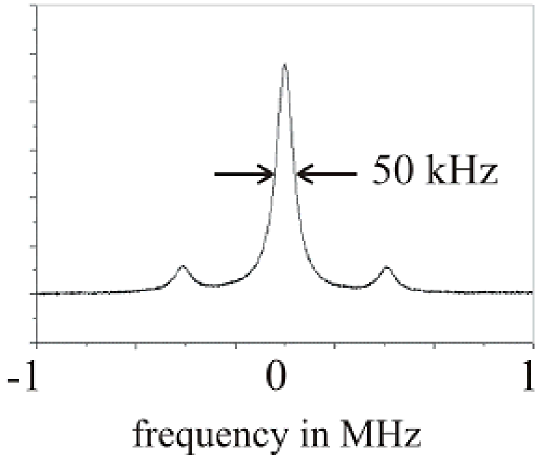
5.2 High-Q 共振器

- 高反射率鏡

$$R = 0.99999 \rightarrow \Im = 3\times10^{5}$$

- 長さ: 10cm、波長: 1 μm→ $Q = 6\times10^{10}$



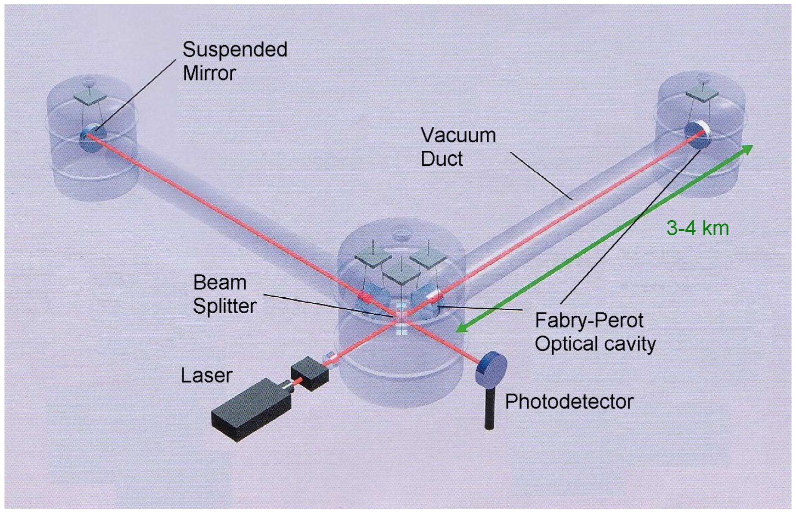


$$R = 0.99997 \rightarrow \Im = 1\times10^{5} \rightarrow \Delta\nu = 50\,\mathrm{kHz}$$

http://www.exphy.uni-duesseldorf.de/ResearchInst/WelcomeFP.html

5.2 High-Q 共振器

- 長基線干渉計
  - 基線長が長いと相対的に線幅が狭くなる
- 重力波検出器
  - LIGO：4 km
  - VIRGO: 3 km
  - TAMA：300 m



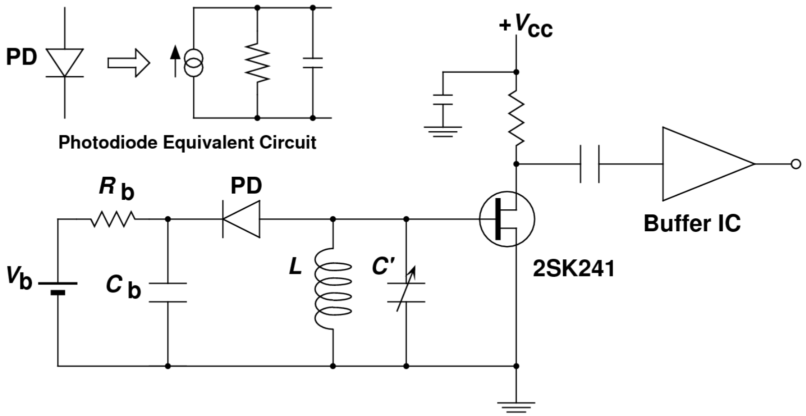
VIRGO

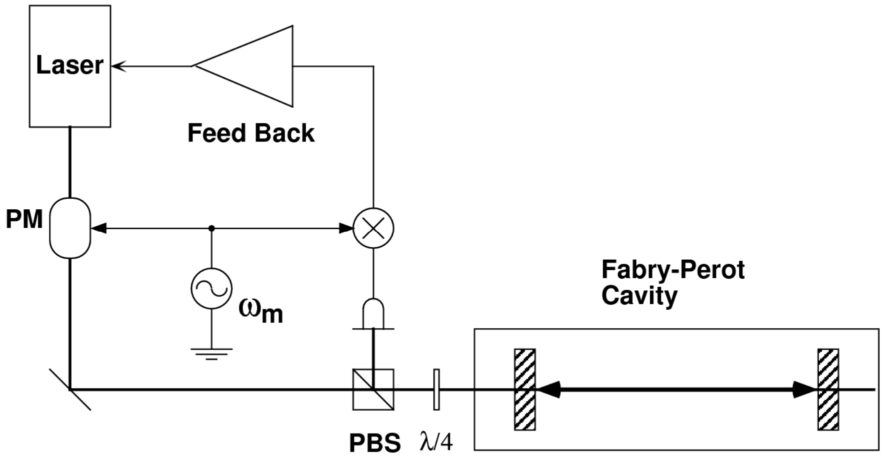
$$\nu_{\mathrm{FSR}} = 50\,\mathrm{kHz},\ \Im = 50$$

$$\rightarrow \Delta\nu = 1\mathrm{kHz},\ Q = 3\times 10^{11}$$

5.2 High-Q 共振器

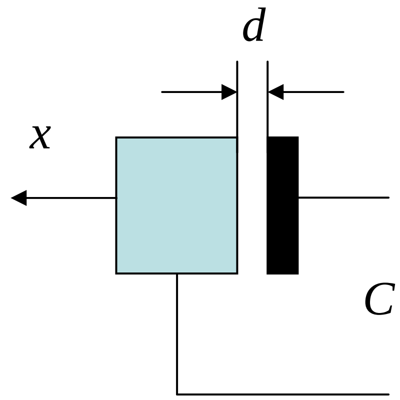
- 共振を利用した高感度光検出回路
- 光共振器を利用したレーザーの周波数安定化システム





5.3 共振を利用した変位センサー

- 物体の変位・振動を検出するセンサー
  – 容量型センサー: 片方の極板を物体に取り付け、変位のよって生じる静電容量の変化を測定する
  – コンデンサーを共振回路の一部に組み込む: 共振型センサー



$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 S}{d + x} = C_0\left(1 - \frac{x}{d}\right),$$

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

5.3 共振を利用した変位センサー

- 共振周波数の変化

$$\omega_0(x) = \frac{1}{\sqrt{LC(x)}} \to \frac{\partial \omega_0}{\partial x} = -\frac{\omega_0}{2C_0}\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\omega_0}{2d}$$

- 共振点では、振幅の変化は1次ではない

$$\frac{\partial |Z|}{\partial \omega_0} = 0 \quad (\omega = \omega_0)$$

- 位相変化を見る

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\frac{({\omega_0}^2 - \omega^2)Q}{\omega\omega_0} \to \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \omega_0}\frac{\partial \omega_0}{\partial x} = \frac{Q}{d} \quad (\omega = \omega_0)$$

- Qが高いと大きな位相変化が得られる

5.3 共振を利用した変位センサー

- 電流源

$$i(t)=i_0\cos\omega_0 t$$

- 出力電圧

$$V(t)=i_0\,\mathrm{Re}[Z(\omega_0,x)\exp i\omega_0 t]$$
$$=i_0R(\cos\omega_0 t-\delta\phi\sin\omega_0 t)$$

- ロックイン検出

$$\delta V=\frac{i_0R\delta\phi}{\sqrt{2}}\qquad\left\langle V_n^{\ 2}\right\rangle=\frac{k_BRT}{\tau_p}$$

- SN

$$SNR=\frac{(i_0R\delta\phi)^2}{k_BRT/\tau_p}=\frac{V_0^{\ 2}Q^2}{k_BRT/\tau_p}\frac{x^2}{d^2}$$

- 電流源の振幅は、最高出力電圧（V_0）とRの比で決まる
- QはRに比例→SNはRに比例
- 発振器の周波数変化があると信号の位相が変化する

$$i(t)=i_0\cos(\omega_0+\delta\omega)t$$

$$\delta V=\frac{i_0R\delta\phi_\omega}{\sqrt{2}},\quad\delta\phi_\omega=-\frac{2Q}{\omega_0}\delta\omega$$

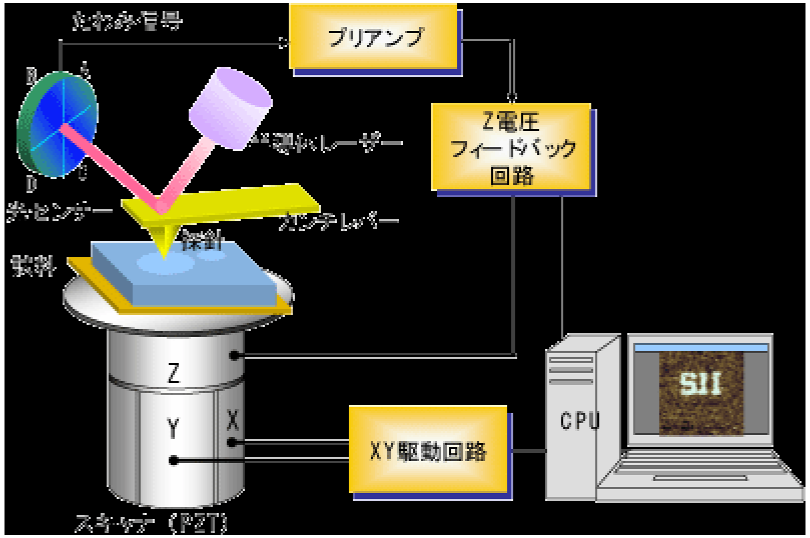
$$\delta\phi=\delta\phi_\omega\rightarrow\frac{x}{d}=\frac{2\delta\omega}{\omega_0}$$

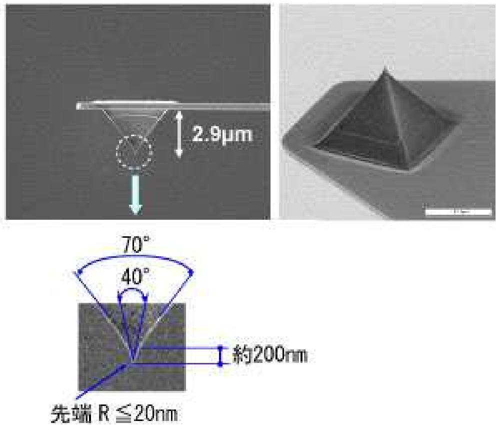
となり、検出限界がQによらない

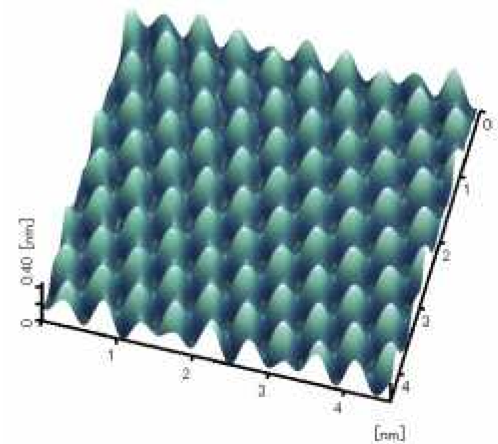
→安定化が必要

5.4 共振を利用した力の測定

- 力の測定:
  - バネを用いて変位に直す。
- 微弱な力
  - 原子間力: 10^{-9}N
- 原子間力顕微鏡
- 小さなカンチレバーの変位で表面原子とカンチレバーの先のチップに働く力を測定







エスエスアイ・ナノテクノロジー株式会社のWebから引用
http://www.siint.com/products/spm/tec_mode/b_2_afm.html

5.4 共振を利用した力の測定

- 原子間力顕微鏡
  - 接触モード：針先を接触させて力を測る
  - 非接触モード：針先が接触させないで測定する→力が弱いので共振を利用する

運動方程式

$$m\left(\frac{d^2}{dt^2}\delta z + \gamma\frac{d}{dt}\delta z + \omega_0{}^2\delta z\right) = f(x, y, z + \delta z)$$

$$\approx f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z$$

$$m\left[\frac{d^2}{dt^2}\delta z + \gamma\frac{d}{dt}\delta z + \left(\omega_0{}^2 - \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z\right] = 0$$

共振周波数が変化

$$\omega_0' = \left(\omega_0{}^2 - \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{1/2}$$

面内でスキャンして像を得ることができる