物理計測法特論
No.3

第4章：負帰還の利用

4 負帰還の利用

- 負帰還（Negative Feedback）
  - 出力の一部を入力に戻す（Feedback）ことで、系のさまざまな特性を改善する

4.1 負帰還とは

- 負帰還を利用することで、
  1. 本来、不安定な系に安定な動作をさせる
  2. 非線形性を除き、歪率を改善する
  3. 系の応答速度を改善する
  4. 入力の揺らぎを取り除いて安定化する

  などのことができる。

4.1 負帰還とは

- 入力x、出力yに図のような経路で信号を帰還すると

$$y = G(x - \beta y)$$

$$y = \frac{Gx}{1+\beta G} \approx \frac{x}{\beta} \qquad \left(|\beta G| >> 1 \right)$$

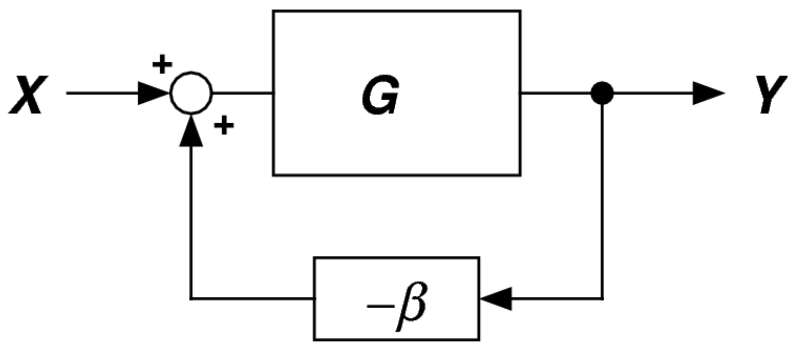
- となり、全体がβだけで決まる。

G : 能動的な素子で決まる
β : 受動的な素子で決まる

- 増幅器本来の増幅率は消えてしまう→不安定な要素の影響が少なくなる。

- 負帰還により、安定な増幅器が得られる。
- 典型例：OPアンプ回路

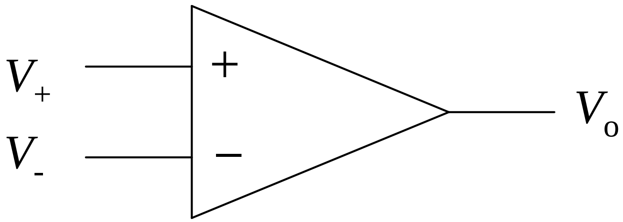
安定動作の実現



4.1 負帰還とは

- OPアンプ
  - 増幅率Aが非常に大きい
  - モノリシックICとして市販されている

$$V_o = A(V_+ - V_-)$$

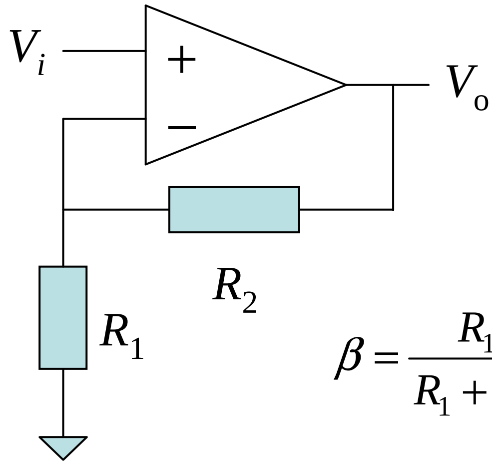


8pin DIP型
OPアンプIC

- 非反転増幅器

$$V_i = V_+, \quad V_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_o$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{A}{1 + A\beta} \approx \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$



$$\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

4.1 負帰還とは

- 増幅器が非線形性を持つ場合

$$y = Gx\left(1 + \sum_{n=1} \varepsilon_n x^n\right)$$

- フィードバック系では

$$y = G(x - \beta y)\left(1 + \sum_{n=1} \varepsilon_n (x - \beta y)^n\right)$$

- 近似すると

$$(x - \beta y) \approx \frac{x}{1 + \beta G}$$

- これを代入すると

$$y \approx \frac{Gx}{1 + \beta G}\left(1 + \sum_{n=1} \varepsilon_n \left(\frac{x}{1 + \beta G}\right)^n\right)$$

$$|\beta G| >> 1 \rightarrow \left|\frac{x}{1 + \beta G}\right| << |x|$$

入力信号の大きさが非常に小さくなるので非線形項の影響は小さくなる

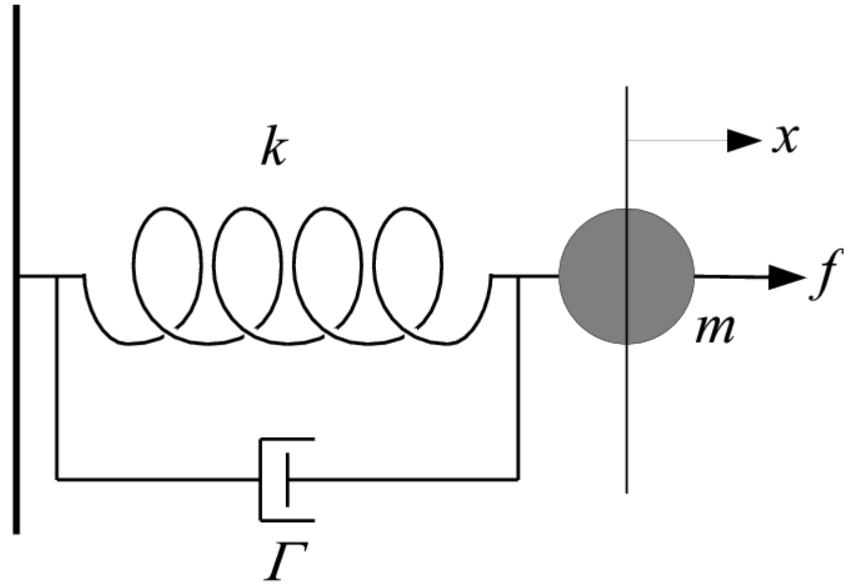
歪率の改善

4.1 負帰還とは

- 負帰還を利用して、系の応答（過渡応答）を改善する（微分制御）
- 例：力学共振系
  - 運動方程式

$$m\left(\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x\right)= f$$

$$\Gamma = m\gamma, \quad k = m\omega_0^2$$



4.1 負帰還とは

- 解の性質
- ステップ応答

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ f_0 & (t \geq 0) \end{cases}$$

$$x_\infty = f_0 / m\omega_0^2$$

$$\gamma^2/4 > \omega_0^2 \rightarrow \Lambda = \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}$$

$$\frac{x}{x_\infty} = 1 - e^{-\gamma t/2}\left(\cosh \Lambda t + \frac{\gamma}{2\Lambda}\sinh \Lambda t\right)$$

$$\gamma^2/4 = \omega_0^2$$

$$\frac{x}{x_\infty} = 1 - e^{-\gamma t/2}\left(1 + \frac{\gamma t}{2}\right)$$

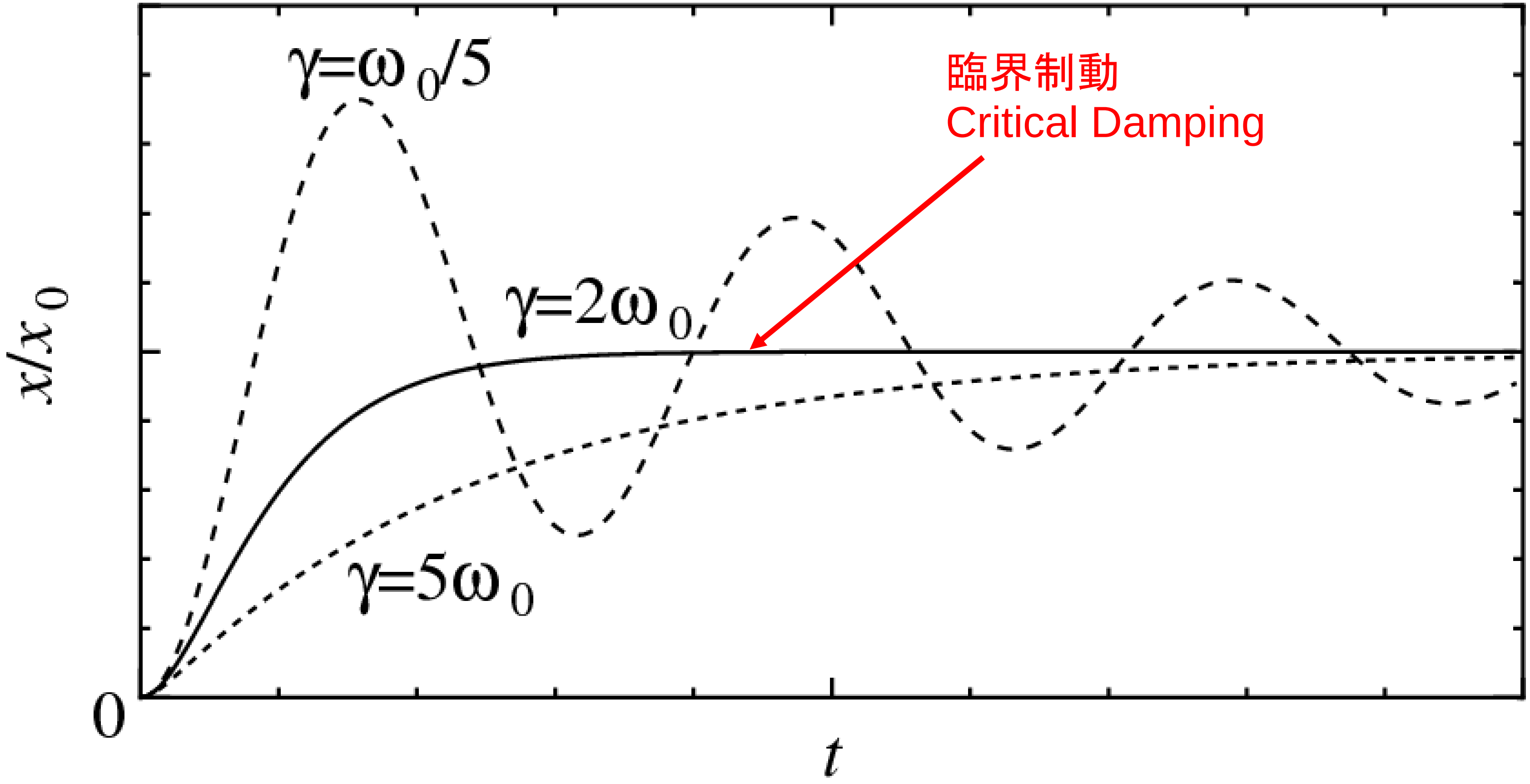
臨界制動
Critical Damping

$$\gamma^2/4 < \omega_0^2 \rightarrow \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$$

$$\frac{x}{x_\infty} = 1 - e^{-\gamma t/2}\left(\cos \omega' t + \frac{\gamma}{2\omega'}\sin \omega' t\right)$$

4.1 負帰還とは

- ステップ応答の様子



4.1 負帰還とは

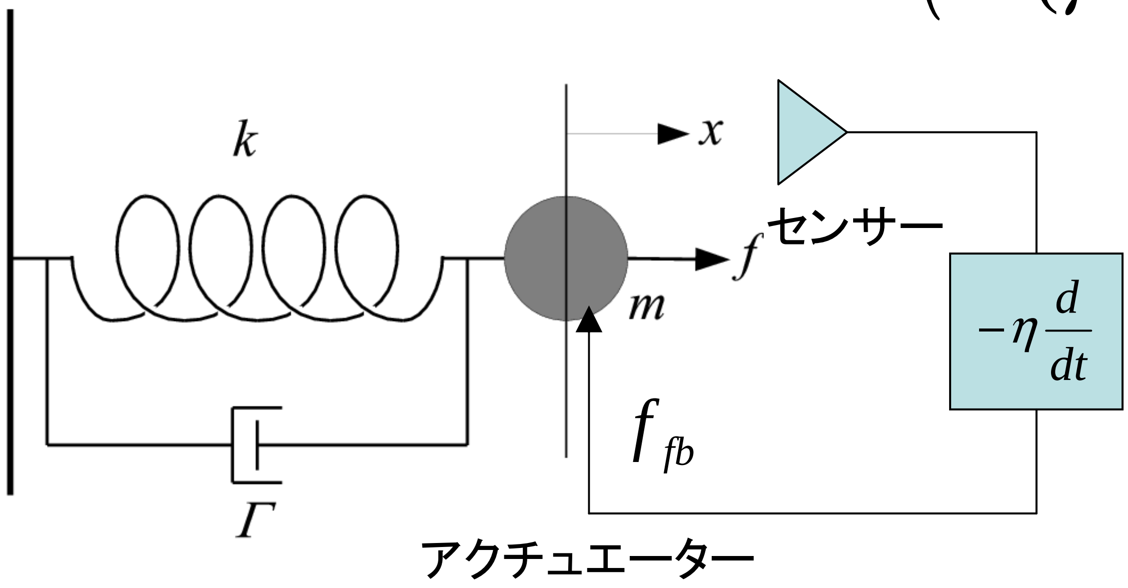
- 普通の状態で臨界制動を実現することは難しい
- 単純に粘性を大きくすると熱雑音が増える
- 負帰還で実現する

$$m\left(\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x\right)= f + f_{fb}$$

$$f_{fb} = -\eta\dot{x}$$

$$\downarrow$$

$$m\left(\ddot{x}+(\gamma+\eta/m)\dot{x}+\omega_0^2 x\right)= f$$



$$\gamma+\frac{\eta}{m}=2\omega_0$$

臨界制動

4.1 負帰還とは

- 熱雑音力はアインシュタインの関係で決まり、フィードバックには無関係である。

$$m\left(\ddot{x}+(\gamma+\eta/m)\dot{x}+\omega_0^2 x\right)= f_B$$

$$\left\langle f_B(t)\, f_B(t')\right\rangle = 2m\gamma k_B T\delta(t-t')$$

$$S_x(\omega)=\frac{\gamma k_B T}{m\pi}\frac{1}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(\gamma+\eta/m)^2\omega^2}$$

$$\left\langle x^2\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)d\omega=\frac{k_B T}{m\omega_0^2}\frac{\gamma}{\gamma+\eta/m}$$

振動子の熱揺らぎの2乗平均振幅が小さくなる。

↓

温度が下がって見える。

$$T_{eff}=T\frac{\gamma}{\gamma+\eta/m}$$

ただし、SNが改善するわけではない。

4.2 負帰還による安定化

- 負帰還による安定化
  - ある信号（物理量）を基準となるものと比較し、その差が0となるように負帰還を行なう。
  - サーボシステムとも呼ばれる。
- 例
  - 安定化電源：出力電圧が一定の電源
  - 恒温槽：温度が一定となる容器

4.2 負帰還による安定化

- 安定化のプロセス
  1. 安定化の対象をxとする。
  2. 安定化の基準x_rを決める。
  3. その差$\delta x = x - x_r$から補正量Δxを求める。
  4. 常にδxが0になるようにΔxを決める。
- これを負帰還で実現する。

4.2 負帰還による安定化

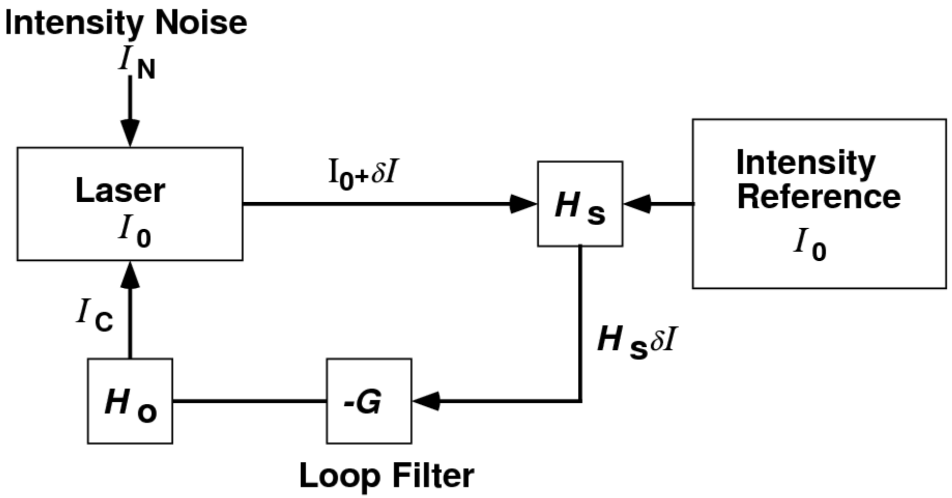
- 例:レーザーの強度安定化

$$
\begin{aligned}
I_{\rm Laser} &= I_0 + \delta I \\
\delta I &= I_{\rm N} + I_{\rm C}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{\rm s} &= H_{\rm s}(I_{\rm Laser} - I_0) = H_{\rm s}\delta I \\
v_{\rm o} &= -G v_{\rm s} \\
I_{\rm C} &= H_{\rm o} v_{\rm o}
\end{aligned}
$$

$$
\delta I = \frac{I_{\rm N}}{1+F} \quad (F = H_{\rm s} G H_{\rm o})
$$

F: オープンループゲイン



4.2 負帰還による安定化

- 揺らぎの大きさはオープンループゲイン分の1になるから、大きなループゲインを用いると大きな安定度が得られる。

$$\delta I \sim \frac{I_{\mathrm{N}}}{F}$$

- フィードバック系の雑音が問題になる場合は、ゲインをあげても安定度は改善しない。

$$v_s = H_s \delta I + v_n \longrightarrow \delta I = \frac{I_N}{1+F} - \frac{F}{1+F}\frac{v_n}{H_s} \approx \frac{I_N}{F} - \frac{v_n}{H_s}$$

4.2 負帰還による安定化

- 実際には、揺らぎは時間変動するので、これまでの議論は周波数応答関数での議論と考える必要がある。

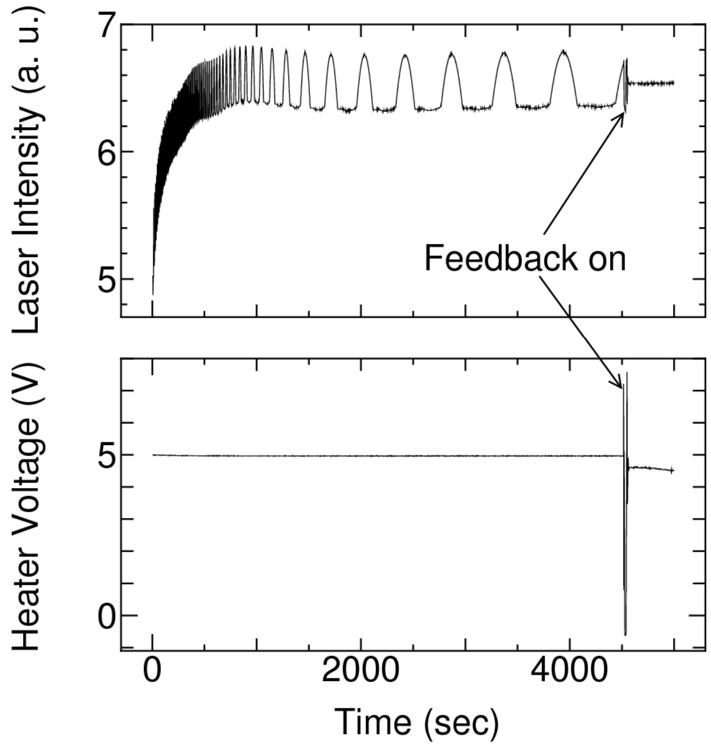
$$\delta I_{\mathrm{N}}(t) = \delta I_{\mathrm{N}}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

$$\delta I(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \frac{I_{\mathrm{N}}(\omega)}{1+F(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

- もし、分母が0になる周波数があると不安定→負帰還系の安定性の議論が必要（次節）

4.2 負帰還による安定化

- 例：He-Neレーザーの強度安定化
  - He-Neレーザーの強度変化：熱によってレーザー管が伸びるとゲインが変化して強度が変動
  - 強度が一定になるようにレーザー管の温度を調節
  - レーザー管にヒーターを巻いて、ヒーターの電圧で制御
  - Feedback onのところで制御を実施
  - 強度が一定になる変わりにヒーターの電圧が変化している。



4.3 負帰還の安定性

- もし、$F(\omega)+1=0$となると系は不安定
- しかし、$F(\omega)$は複素関数なので簡単には-1にはならない。
- ところが、非常に多くの場合、特に、大きなゲインの系では系が不安定になり発振することが多い。
- さまざまな安定度の評価法がある。
- 一番の基本はNyquistの判定法

ωを$-\infty \to 0 \to \infty$ と変化させたときに、$F(\omega)$ の実部と虚部が複素平面上に描く軌跡（Nyquist軌跡）が、(-1+i 0) を反時計回りに回る数をN, $F(\omega)$ の極のうち下半面にある（虚数部が負）のものの数をPとすると、 $N=P$ の時に限って、この制御系は安定である。

普通は$P=0$なので、$N=0$が安定条件

4.3 負帰還の安定性

- 複素関数論

$$1+F(\omega)=0$$

の解（特性根）を調べると系の安定性がわかる。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\omega-\alpha}d\omega=2\pi i e^{i\alpha t}$$

だから、αの虚部が負の場合、発散し、不安定となる。

$$\frac{1}{1+F(\omega)}=A\frac{(\omega-z_1)(\omega-z_2)\cdots(\omega-z_m)}{(\omega-p_1)(\omega-p_2)\cdots(\omega-p_n)}$$

- p_1からp_nのすべての虚部が正なら安定→Nyquistの判定法

4.3 負帰還の安定性

- ナイキスト線図
  - 周波数応答関数の実部と虚部を周波数の関数でプロット
- 2次までは位相遅れが180度を越えることが無い→必ず安定
- 3次以上では180度を越えるので、不安定になることがある。