

物理計測法特論

No.2

第2章:種々の雑音

第3章:ロックインアンプと変調法

2 種々の雑音

- 原理的な揺らぎ
 - 量子揺らぎ
 - 熱揺らぎ

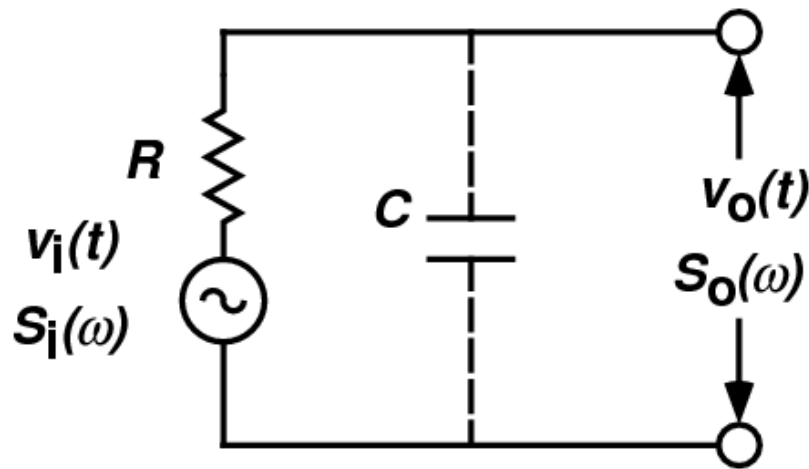
理論的に取り扱うことができる。

2.1 熱雑音

- 熱浴と接する系：熱浴とのエネルギーのやり取りを行う→揺らぎが生じる
- 力学系の熱揺らぎ
 - ブラウン運動
 - アインシュタインの関係式
- 電気系の熱揺らぎ
 - 抵抗の熱雑音

2.1 熱雑音

- RCの回路



$$S_o(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega CR)^2} S_i(\omega)$$

- 熱平衡: エネルギー等分配則

$$\frac{\langle q^2 \rangle}{2C} = \frac{1}{2} k_B T \rightarrow \langle v_o^2 \rangle = \frac{\langle q^2 \rangle}{C^2} = \frac{k_B T}{C}$$

$$\langle v_o^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_o(\omega) d\omega = \frac{\pi S_i}{RC} = \frac{k_B T}{C}$$

$$S_i = \frac{Rk_B T}{\pi} \rightarrow G_i = 4Rk_B T$$

- 電気抵抗Rは

$$G_i = 4Rk_B T$$

で表わされる雑音を持つ

ナイキストの熱雑音の公式

2.2 散射雑音

- 電流：電子の流れ→ランダムに揺らぐ：散射雑音（ショット雑音）

$$I(t) = \sum_k e\delta(t-t_k)$$

- 実際の電流は、ある時間間隔 T に到達する電子の個数 N で

$$\overline{I_T}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t I(t') dt' = \frac{eN(t)}{T}$$

- N はポアソン分布をする。

$$\langle N \rangle = \lambda T, \quad \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle = \langle N \rangle = \lambda T$$

- 電流の平均値は

$$I_0 = \langle \overline{I_T}(t) \rangle = \frac{e\langle N(t) \rangle}{T} = e\lambda$$

- 電流の揺らぎは

$$\delta I_T^2 = \frac{e^2 \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle}{T^2} = \frac{e^2 \lambda}{T} = \frac{eI_0}{T}$$

時間平均の帯域幅は $\Delta f = \frac{1}{2T}$

$$\delta I_T^2 = 2 \frac{eI_0}{2T} = 2eI_0 \Delta f$$

電流揺らぎのパワースペクトルは

$$G_I = 2eI_0$$

で表わされる（**ショットキーの公式**）

2.3 $1/f$ 雑音

- 定常状態は平衡状態ではない
- 能動素子、定常電流は低周波数側で、揺らぎのスペクトルが

$$G(f) \propto \frac{1}{f^\alpha} \quad \alpha \approx 1$$

という振る舞いをする。

- $1/f$ 雑音(フリッカー雑音)と呼ばれる。
- 原因は不明であるが、非常に多くの分野で見られる(交通量の揺らぎ、脈拍のタイミングの揺らぎなど)。

- 一つの説明として、数多くの緩和の重ね合わせと考えることがある。

$$G(f) = \sum \frac{G_i}{1 + (2\pi\tau_i f)^2} \approx \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{g(\tau)}{1 + (2\pi\tau f)^2} d\tau$$
$$\approx \frac{g_0}{2\pi f} \left(\tan^{-1}(2\pi f\tau_2) - \tan^{-1}(2\pi f\tau_1) \right) \approx \frac{g_0}{4f}$$

$(2\pi f\tau_2 \gg 1, 2\pi f\tau_1 \ll 1)$

- 増幅器で信号を増幅する際、低い周波数の増幅が困難になる原因である。

2.4 増幅器の雑音

- 増幅器の雑音
- 電圧性雑音: e_n
 - 入力信号をマスクするように加わる雑音
- 電流性雑音: i_n
 - 入力側へ電流を流すような雑音 (反作用を持つ、入力に接続されるものに依存する)
- アンプと抵抗を接続する。

$$v_i = e_n + Ri_n + e_R$$

- e_R : 抵抗の熱雑音 $G_R = 4Rk_B T$

$$\langle v_i^2 \rangle = \langle e_n^2 \rangle + R^2 \langle i_n^2 \rangle + 4k_B TR$$

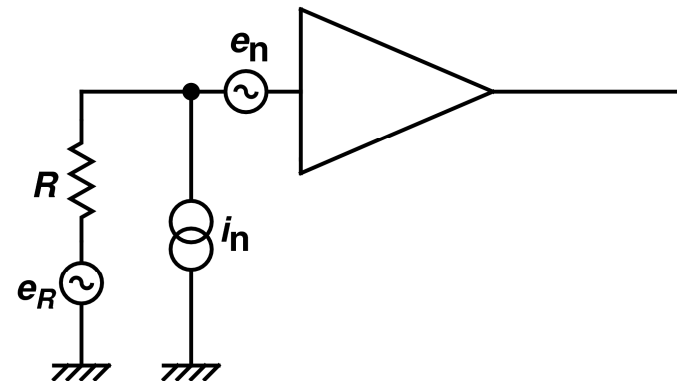
$$= 4k_B TR \left[1 + \frac{1}{4k_B T} \left(\frac{G_e}{R} + RG_i \right) \right]$$

- 雑音指数(NF)

$$NF = \frac{\langle v_i^2 \rangle}{4k_B TR} \geq \left[1 + \frac{\sqrt{G_e G_i}}{2k_B T} \right] = \left[1 + \frac{T_n}{T} \right]$$

- 雑音温度 T_n 、最適信号源抵抗 R_{opt} : 共に周波数の関数

$$T_n = \frac{\sqrt{G_e G_i}}{2k_B}, \quad R_{opt} = \sqrt{\frac{G_e}{G_i}}$$



2.4 増幅器の雑音

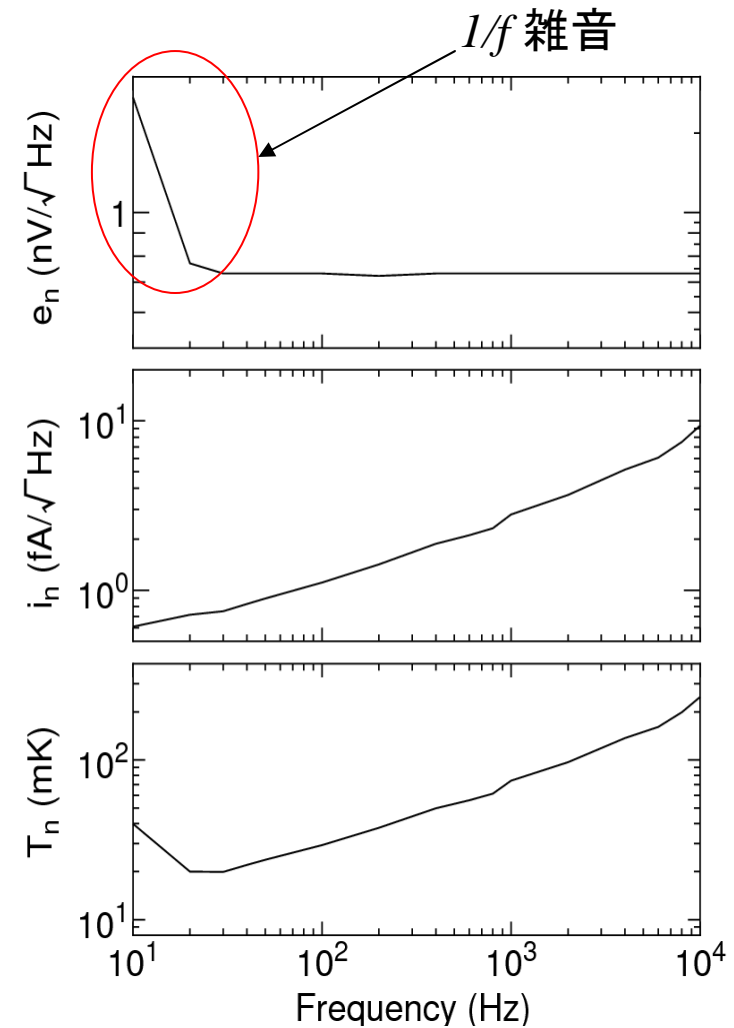
- 増幅器の雑音スペクトルの例
 - 低雑音増幅器用JFET
 - 東芝:2SK147

$$e_n = 0.7 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$$

$$i_n = 1.0 \text{ fA}/\sqrt{\text{Hz}}$$

$$T_n = 25 \text{ mK}$$

(100 Hzでの値)



3 ロックインアンプと変調法

- 微小信号計測に必須アイテムであるロックインアンプとその応用で重要な変調法について述べる。

3.1 ロックインアンプ

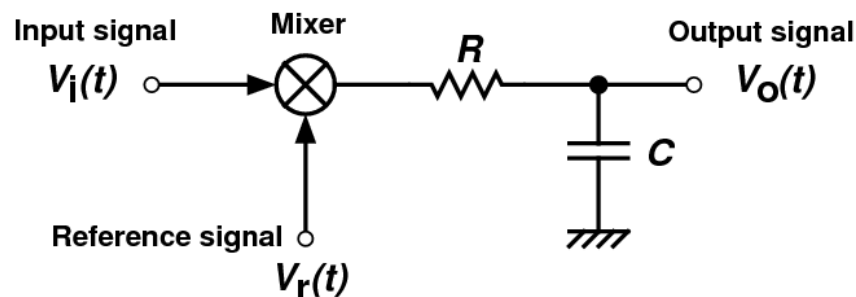
- ロックインアンプ
 - 2つの入力信号を持つ
 - 正弦波を測定する
 - 掛け算器、ローパスフィルター

• 入力信号 $V_i = A \cos(\omega_i t + \phi)$

• 参照信号 $V_r = B \cos \omega_r t$

• ミキサーの出力

$V_m \propto \cos[(\omega_i - \omega_r)t + \phi] \rightarrow$ 差周波
 $+ \cos[(\omega_i + \omega_r)t + \phi] \rightarrow$ 和周波



- ローパスフィルターでは、差周波成分しか出ない。
- ロックイン検出(同期検出)では、

$$\omega_i = \omega_r$$

- 出力は

$$V_o = \frac{A}{\sqrt{2}} \cos \phi$$

- 実効値を出力するように、掛け算器のゲインを適当に決める。
- 出力が位相差に依存する(位相敏感検出、PSD)

3.1 ロックインアンプ

- ロックインアンプの理論式

$$V_0(t) = \frac{\sqrt{2}}{\tau_p} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_p}\right) \cos(\omega_r s) V_i(s) ds$$

- 時定数: $\tau_p = RC$

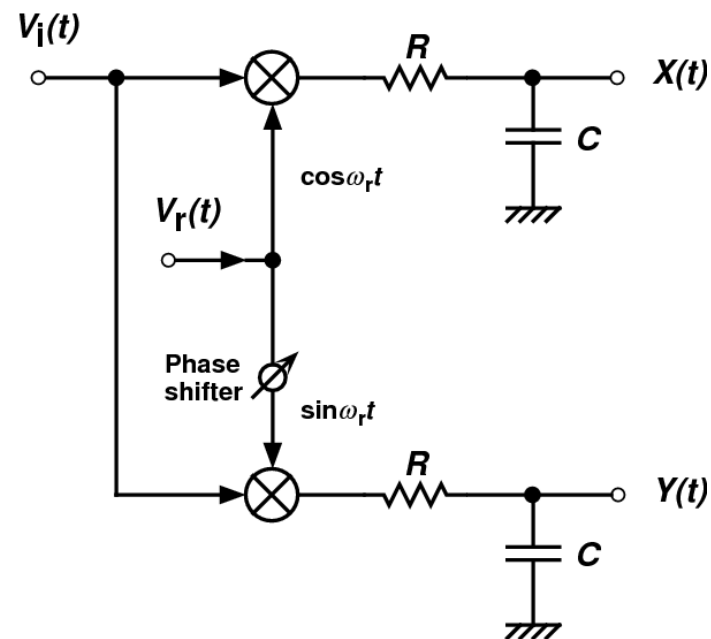
- 位相の不確定さをなくす: 2位相ロックインアンプ
 - 位相の90度ずれた2つの参照信号を用いる

$$Z(t) = \frac{\sqrt{2}}{\tau_p} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_p}\right) \exp(i\omega_r s) V_i(s) ds$$

$$Z = X + iY$$

$$V_i = A \cos(\omega t + \phi) \rightarrow$$

$$X = \frac{A}{\sqrt{2}} \cos \phi, \quad Y = -\frac{A}{\sqrt{2}} \sin \phi$$



3.1 ロックインアンプ

- 入力が雑音の時のミキサー出力

$$V_m(t) = \sqrt{2}v_n(t) \cos \omega_r t$$

- 自己相関関数

$$\begin{aligned} \langle V_m(t)V_m(t+\tau) \rangle &= 2 \langle v_n(t)v_n(t+\tau) \rangle \overline{\cos \omega_r t \cos \omega_r (t+\tau)} \\ &= R(\tau) \cos \omega_r \tau \end{aligned}$$

- パワースペクトル

$$\begin{aligned} S_m(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cos(\omega_r \tau) \exp(i\omega\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \exp[i(\omega + \omega_r)\tau] d\tau \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \exp[i(\omega - \omega_r)\tau] d\tau \\ &= \frac{1}{2} [S(\omega + \omega_r) + S(\omega - \omega_r)] \end{aligned}$$

- ローパスフィルターの出力

- 信号: 直流成分
- 雑音: 直流付近の揺らぎ、
- バンド幅: $\Delta f = \frac{1}{4\tau_p}$

- 出力の揺らぎ(1チャンネル分)

$$\langle V_0^2 \rangle = 4\pi S_m(0) \Delta f = \frac{4\pi S(\omega_r)}{4\tau_p} = \frac{G(f_r)}{4\tau_p}$$

- 入力雑音の参照信号周波数 f_r のスペクトルの値 $G(f_r)$ と時定数で決まる。
- 時定数が大きいほど揺らぎが小さくなる。

3.1 ロックインアンプ

- 2位相で検出する場合には、測定すべき量を考える必要がある。
- 純粹に振幅だけ測定する場合

$$A = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\begin{aligned}\langle \delta A^2 \rangle &= \left(\frac{\partial A}{\partial X} \right)^2 \langle \delta X^2 \rangle + \left(\frac{\partial A}{\partial Y} \right)^2 \langle \delta Y^2 \rangle \\ &= \frac{X^2}{X^2 + Y^2} G \Delta f + \frac{Y^2}{X^2 + Y^2} G \Delta f \\ &= G \Delta f\end{aligned}$$

と片方チャンネル測定に等しい。

- 時定数によるバンド幅

$$R = 1 \text{ M}\Omega, C = 1 \mu\text{F}$$

$$\rightarrow \tau_p = 1 \text{ s} \rightarrow \Delta f = 0.25 \text{ Hz}$$

- バンドパスフィルターのバンド幅

$$\Delta f = \frac{2\pi f_0}{4Q}$$

$$f_0 = 1 \text{ kHz}, \Delta f = 0.25 \text{ Hz}$$

$$\rightarrow Q = 6.3 \times 10^3$$

等価的に非常に大きな Q のフィルターが簡単に実現できる。

3.2 変調法

- 測定したい物理量にあらかじめ特定の周波数で変調をしておき、その周波数の信号だけを選択的に検出する。

- 振幅変調(AM)

$$A \cos(\Omega t + \phi) \rightarrow (A + a \cos \omega_m t) \cos(\Omega t + \phi)$$

- 位相変調(PM)

$$A \cos(\Omega t + \phi) \rightarrow A \cos(\Omega t + \phi_0 + m \sin \omega_m t)$$

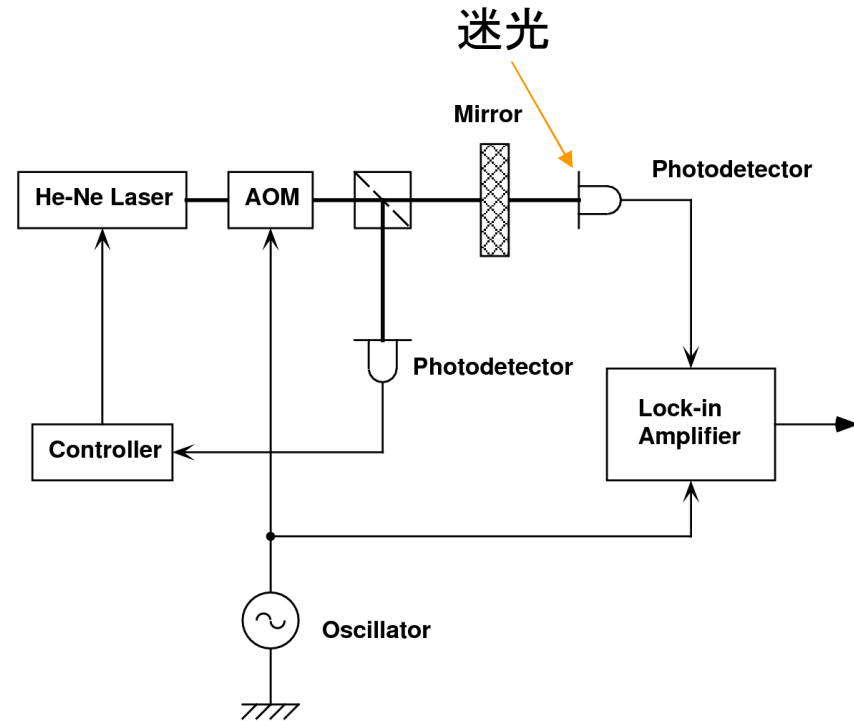
- 周波数変調(FM)

$$A \cos(\Omega t + \phi) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} = f_m \sin \omega_m t$$

- ロックインアンプを有効に利用できる。

3.2 変調法

- 測定例: 微弱透過光の測定
 - サンプルの鏡: 透過率 $<10^{-5}$
 - 透過光が小さいので迷光などが検出に混入する。
 - 入射レーザー光に音響光学変調器(AOM)で振幅変調を掛ける。
 - 検出器の信号から変調周波数成分の信号だけをロックインアンプで取り出す。
 - 迷光などには、変調周波数の成分は無いので、高感度に測定ができる。



3.2 変調法

- 検出光(鏡なし)

$$I(t) = I_0(1 + \alpha \cos \omega t) + I_n(t)$$

- 検出光(鏡あり)

$$I_t(t) = T \cdot I_0(1 + \alpha \cos \omega t) + I_n(t)$$

$I_n(t)$: 検出器の雑音、迷光など揺らぎ

T : 鏡の透過率、 $T \ll 1$

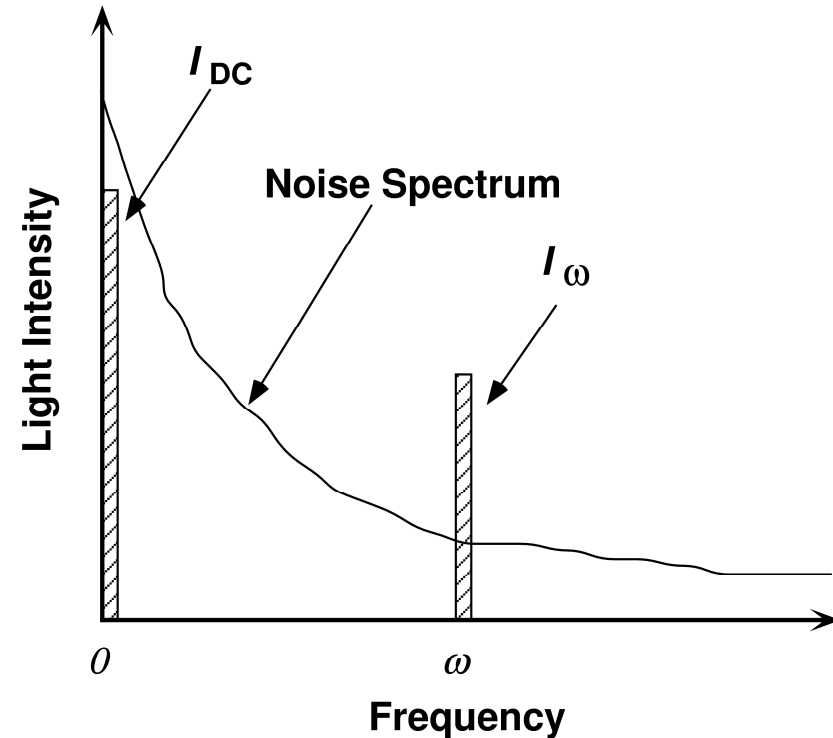
- 直流で検出した時に揺らぎ

$$\delta I_{DC} = \sqrt{G_I(0)\Delta f}$$

- 変調法の場合

$$\delta I_\omega = \sqrt{G_I(\omega)\Delta f}$$

- 一般に雑音のスペクトルは周波数が高いほど小さいので、変調法が有効に働く。



3.2.1 変調と微分検出

- ある物理量に

$$y = f(x)$$

という関係があるときに

$$x = x_0 + x_m \cos \omega_m t$$

で表わされる変調を掛けると

$$y = f(x_0 + x_m \cos \omega_m t)$$

$$\approx f(x_0) + (x_m \cos \omega_m t) \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0}$$

$$+ \frac{1}{2} (x_m \cos \omega_m t)^2 \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_{x=x_0}$$

と展開できる。

- y に含まれる ω の成分の振幅は

$$y_\omega = x_m \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} \times \cos \omega_m t$$

$f(x)$ の1次微分に比例する。

- y に含まれる 2ω の成分の振幅は

$$y_{2\omega} = \frac{1}{4} x_m^2 \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_{x=x_0} \times \cos 2\omega_m t$$

$f(x)$ の2次微分に比例する。

- 信号中の変調周波数成分の高調波を検出すると関数の微係数が求められる。
- 変調分光法などで用いられる。
 - ピークの位置: 1次微分が0