

物理計測法特論

No.1

第1章：信号と雑音

本講義の主題

- 雑音の性質を理解することで、信号と雑音の大きさが非常に近い状態での信号の測定技術:「微小信号計測」について学ぶ。
- 講義のWeb

http://www.g-munu.t.u-tokyo.ac.jp/mio/note/sig_mes/tokuron.html

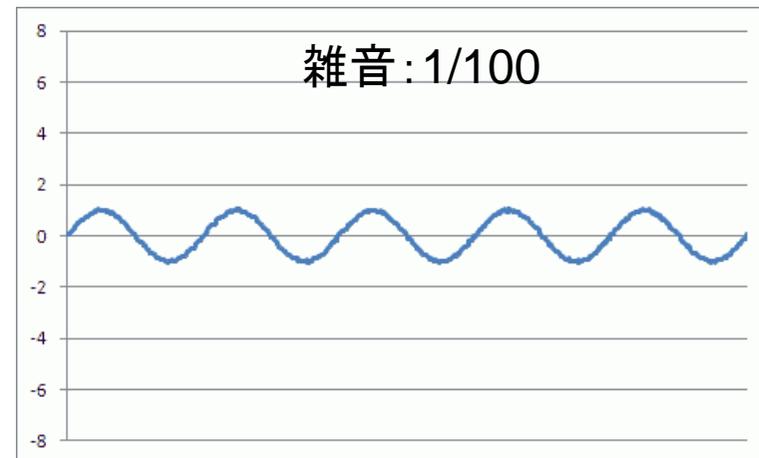
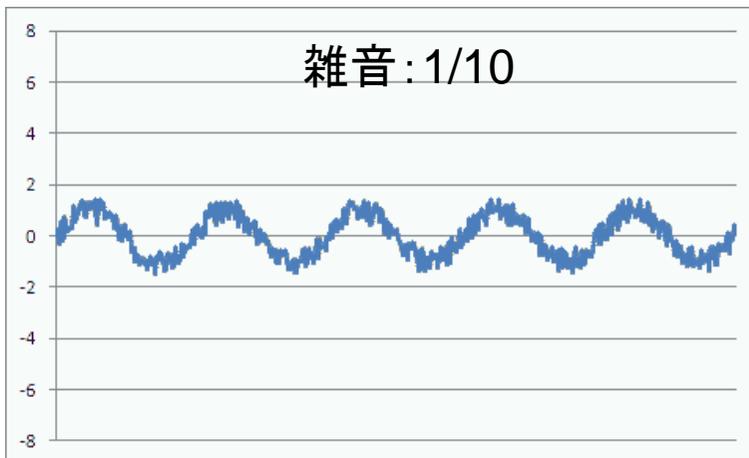
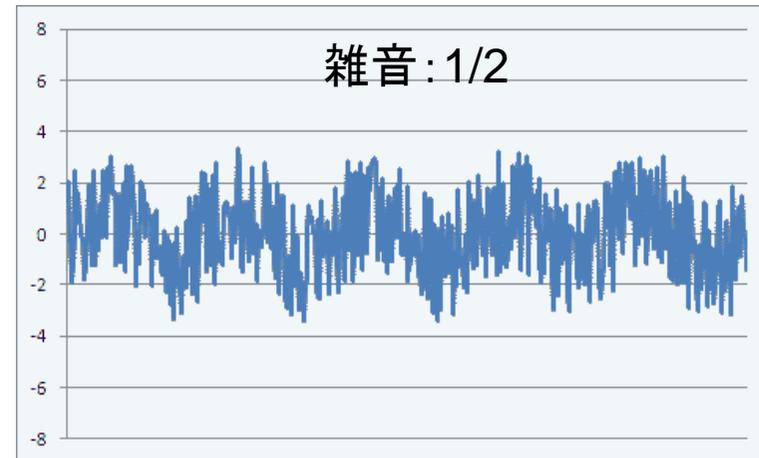
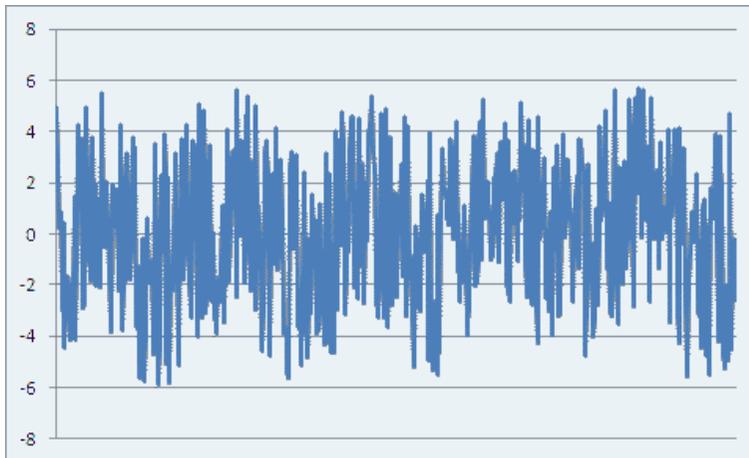
物理学の基本は実験事実の積み重ねである。
そして、それは何かを測定することから始まる。
本講義では、物理学実験に現れる測定法の
基礎について述べる。

微小信号測定技術

- 微弱な効果・物理現象は雑音に埋もれた微小な信号として測定される。
- 微小信号測定技術：
 - 新しい現象を見つけることにつながる
 - 典型例：重力波？？？

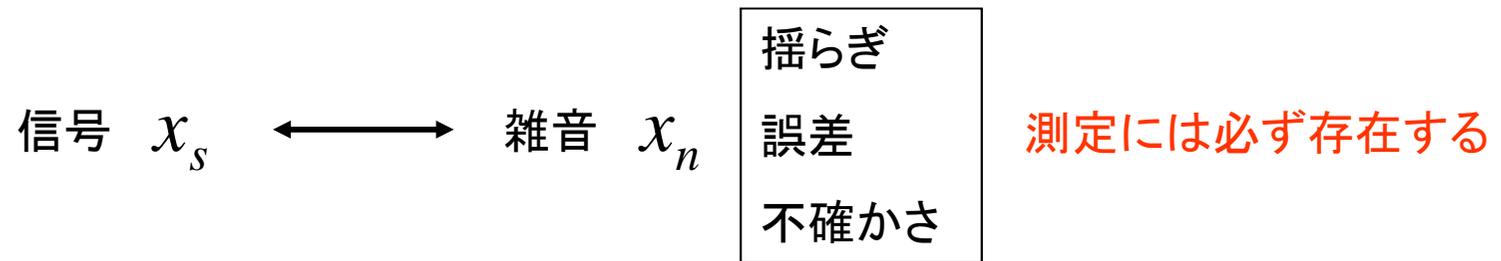
検出限界を決めるもの：雑音

- どこまで小さな信号が測定できるか？
- 信号と雑音の大きさの比を考えないとイケない。



1. 信号と雑音

- 微小信号とは何か？



微小信号 $x_s \approx x_n$ 予測される信号の大きさが
測定系の雑音の大きさと同程度になった時

- 微小信号測定技術

雑音を「下げる」or「避ける」ための技術

1. 信号と雑音

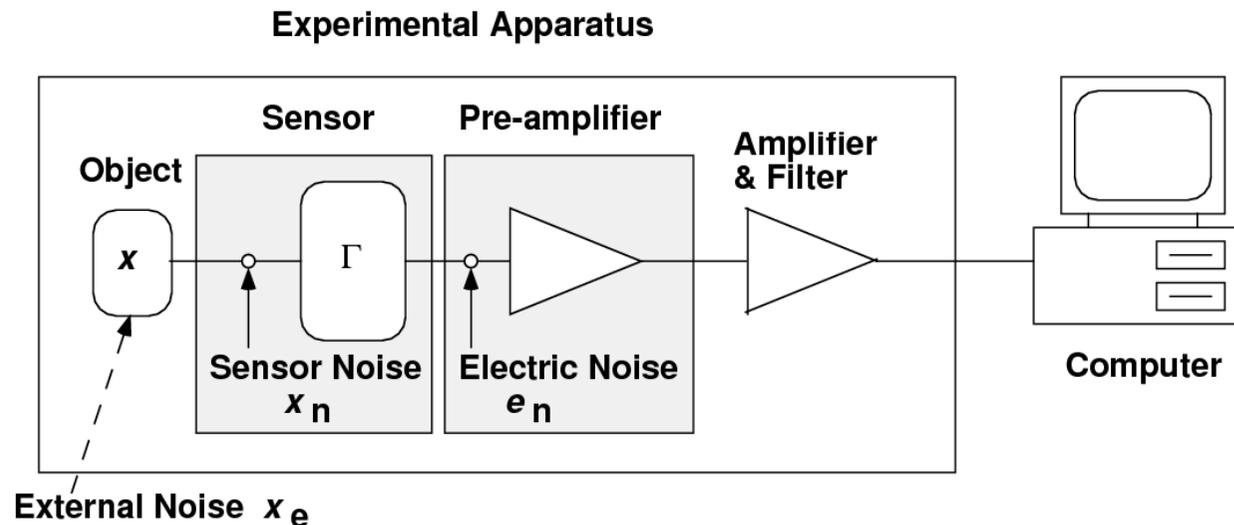
- 必要なこと
 - 測定装置の低雑音化: ハードウェア
 - 測定法の改善: 物理
 - データ処理: ソフトウェア

まず大事なことは雑音について知ること

1.1 測定装置と雑音

- 測定装置のモデル \longleftrightarrow 雑音の種類

$$v = G[\Gamma(x + x_n + x_e) + e_n]$$



Γ : センサーや測定器の感度？
 $\Gamma \rightarrow$ 大 = 高感度？

原理的な雑音と比較しないと
意味が無い

1.1 測定装置と雑音

- 入力換算雑音 $x_{\text{equ}} = x_n + e_n/\Gamma$
これが小さいことが重要
- 装置全体の感度決める雑音
センサーに近い部分の雑音
- センサー自身の持つ原理的な雑音は除去できない
これが何かを知ることが大事
- 測定装置全体の感度がこの雑音で決まるように装置を設計すべき

1.1 測定装置と雑音

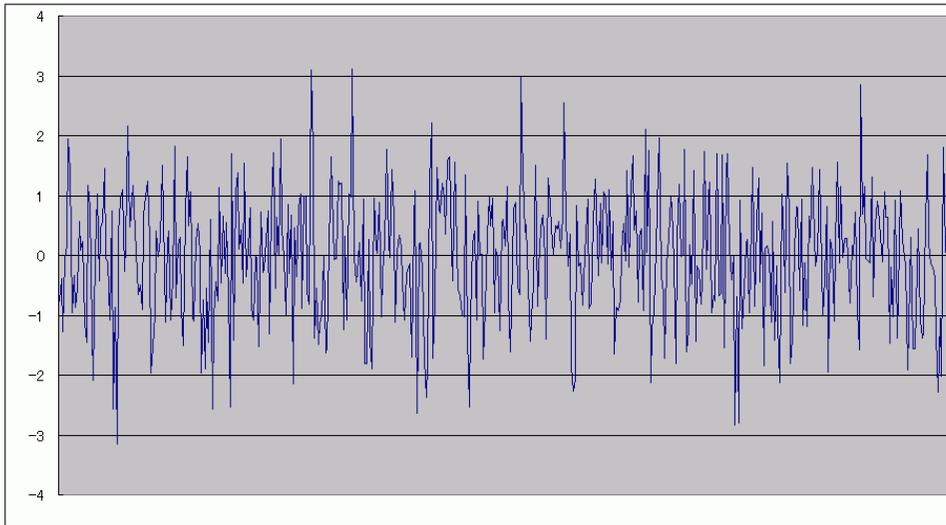
- 雑音にもいろいろな種類がある
 - 定常的な揺らぎ: 統計的な性質がよく分かっている→数学的に**確率過程**と呼ばれる(詳しく説明)
 - 突発的な事象、再現性の無い事象: 対策が非常に難しい→原因探しに走り回るしかない

格言 「雑音は受害者負担！」

1.2 確率過程

- 不規則に変動する統計現象: 数学的に確率過程と呼ばれる。

$x(t)$: 確率変数



時間的にランダムに変動する
→ 平均値が意味を持つ

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty)$$

$$(\bar{x} \neq 0 \rightarrow \delta x = x - \bar{x})$$

雑音の大きさは2乗平均で表される

$$\overline{x^2} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \rightarrow \sigma^2 (T \rightarrow \infty)$$

理論計算では統計的期待値を用いる

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \rightarrow \langle \rangle$$

1.2 確率過程

- 時間平均と統計的期待値が等しい:エルゴート性
- エルゴート性を持つ確率過程→**エルゴート過程**:仮定

$$\overline{x^2} = \langle x^2 \rangle = \sigma^2$$

- 統計的期待値:確率分布関数 $f(x)$ を用いる。

$$\int f(x)dx = 1 \quad (f(x) \geq 0)$$

$$\langle x \rangle = \int xf(x)dx$$

- ガウス分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\langle x \rangle = \mu, \quad \langle (x-\mu)^2 \rangle = \sigma^2$$

- 非常に多くの現象がガウス分布で説明される
- 分布関数がガウス分布を持つ確率過程→**ガウス過程**:仮定

1.2 確率過程

- 時間的な変動が定常である。

$$\langle x(t) \rangle = \mu(t) = \mu$$

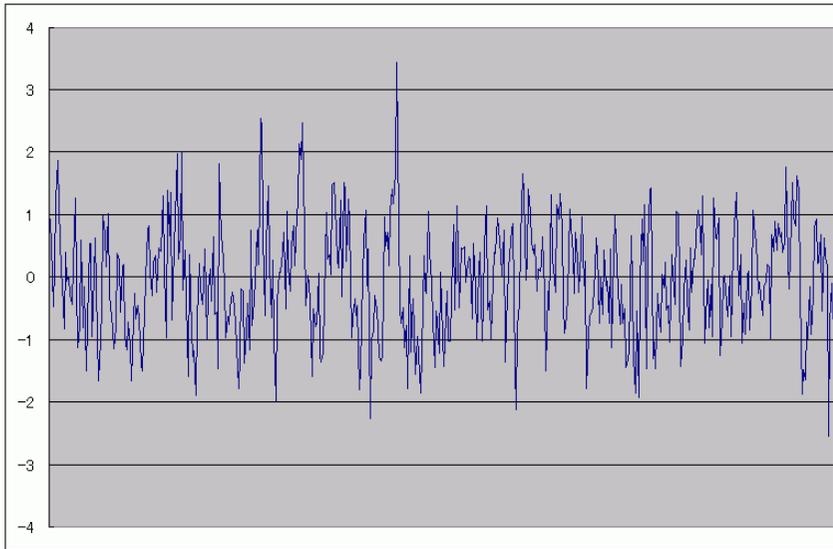
$$\langle (x(t) - \langle x \rangle)^2 \rangle = \sigma^2(t) = \sigma^2$$

- 定常過程という(正確には弱定常)

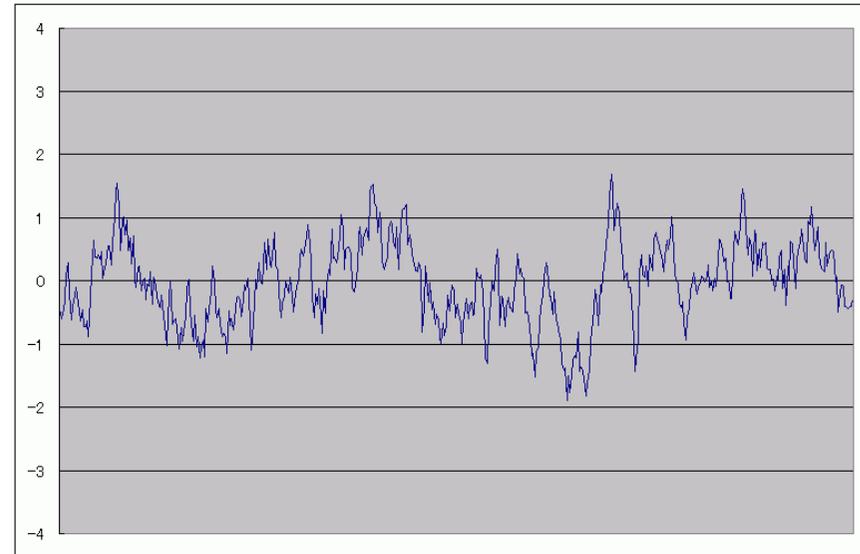
- 熱雑音、増幅器の雑音などはこのような性質を持つ。
 - エルゴート
 - ガウス
 - 定常
- 以下の議論ではこの性質を仮定して行う。

1.2.1 パワースペクトル

- 下記の2つの揺らぎの成分はほぼ同じ分散を持つが、明らかに X_2 の方が X_1 より、ゆっくり変動している。
- この差を表現するための指標が必要である。



X_1



X_2

1.2.1 パワースペクトル

- 雑音の大きさ(強さ)は2乗平均で表されるが、変動の仕方を区別する必要がある。
- 正弦波
$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$
$$\overline{x^2(t)} = \frac{A^2}{2}$$
- 2乗平均すると周波数の情報が消えてしまう。
- 雑音も同じで、2乗平均すると変動の時間的な特徴が消えてしまう。
- 周波数の情報を得る→フーリエ解析を行う。

1.2.1 パワースペクトル

- フーリエ変換: 二乗可積分関数 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

- パーセバルの式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

- 雑音の場合 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \rightarrow \infty$

- 有限の時間間隔で考える
 $-T/2 \leq t \leq T/2$

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

- この関数のフーリエ変換を考える

$$X_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-i\omega t} dt$$

$x(t)$ が確率変数なので、
 $X_T(\omega)$ も確率変数

1.2.1 パワースペクトル

- この確率過程のパワースペクトル $S(\omega)$ を下記のように定義する。

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle |X_T(\omega)|^2 \rangle}{2\pi T}$$

- この量を用いると

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$$

パワースペクトルは雑音の強度を各周波数成分に分解して、単位周波数あたりの強度で表わしたものである。

1.2.1 パワースペクトル

- パワースペクトルの性質
 - x が実数なら偶関数

$$S(\omega) = S(-\omega)$$

- 表記法による違い
 - 角周波数か周波数か: 変数を角周波数 ω で表わすか周波数 f で表わすか。
 - 両側表示するか片側表示するか: 積分範囲を $(-\infty, \infty)$ とするか $(0, \infty)$ で表わすか。

- 単位角周波数当りの両側スペクトル $S(\omega)$ 、単位周波数当りの片側スペクトル $G(f)$ の2つがよく用いられる。

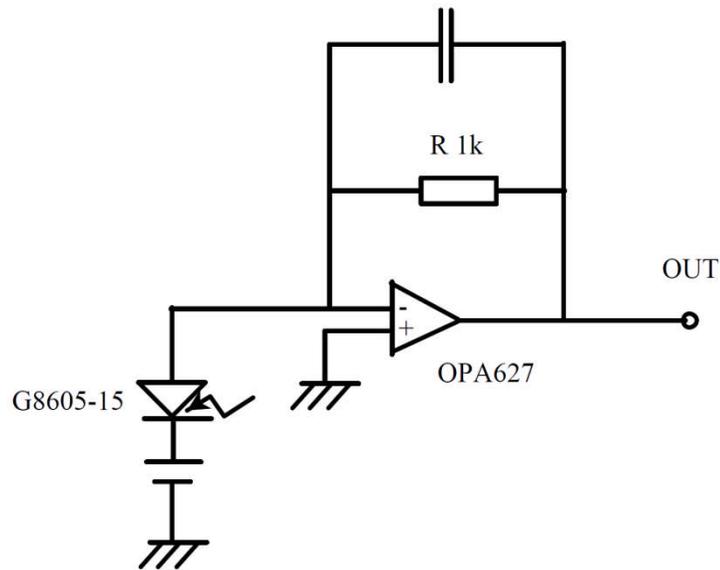
$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} G(f) df \quad (\omega = 2\pi f)$$

$$G(f) = 4\pi S(2\pi f)$$

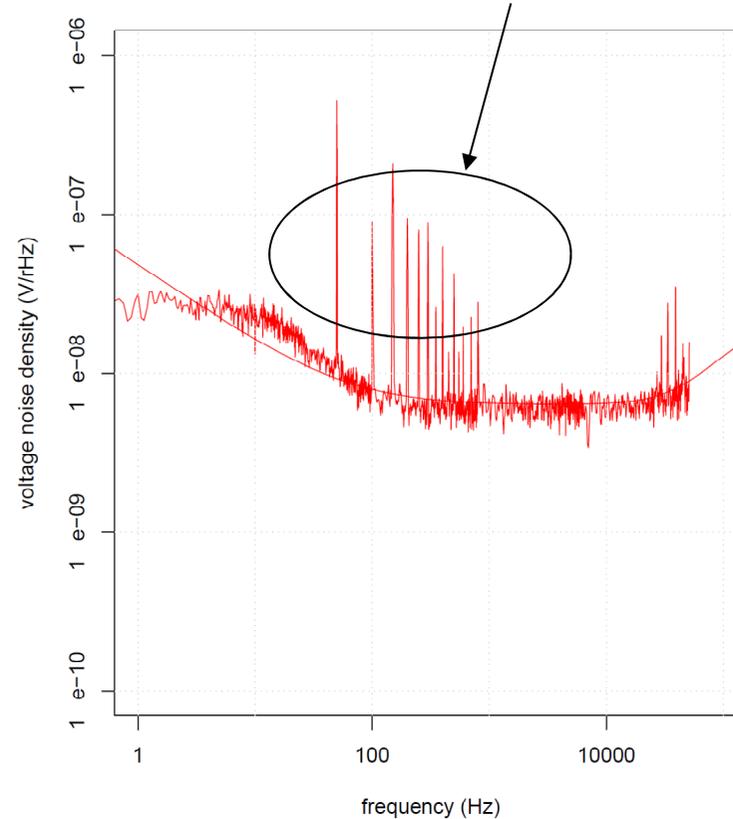
- また、実際の雑音表記ではこの平方根 $\sqrt{G(f)}$ で表わすことも多い。単位は、雑音が電圧の時、 $V/\sqrt{\text{Hz}}$

1.2.1 パワースペクトル

- パワースペクトルの例
微弱光測定用回路



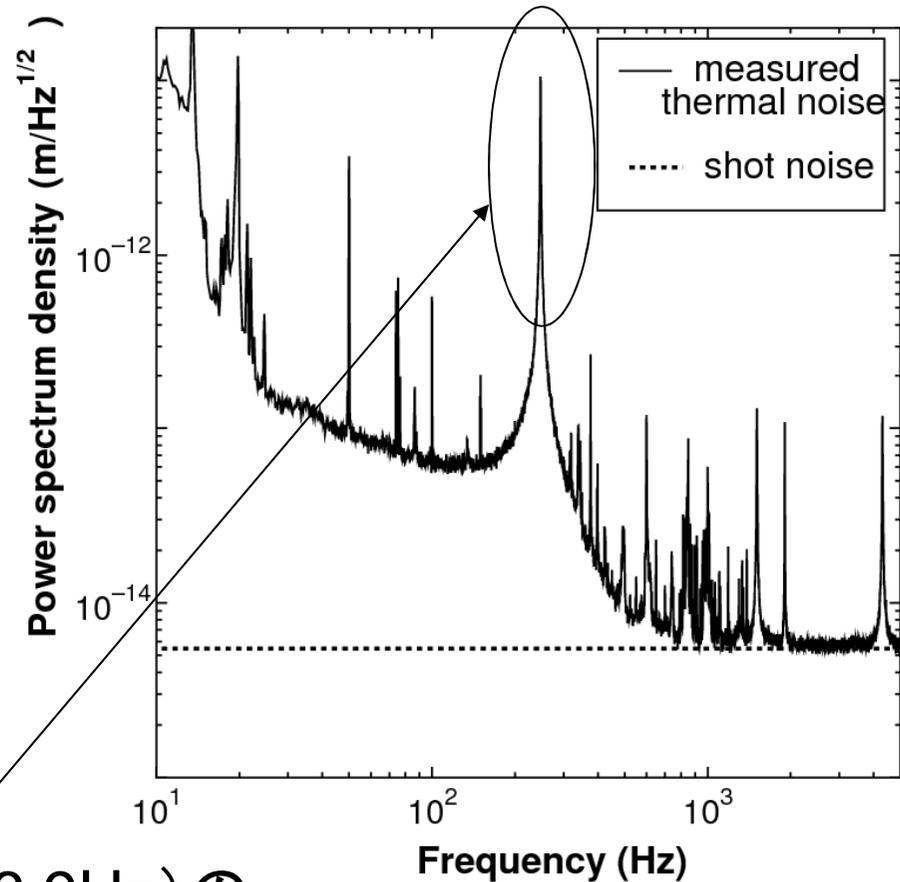
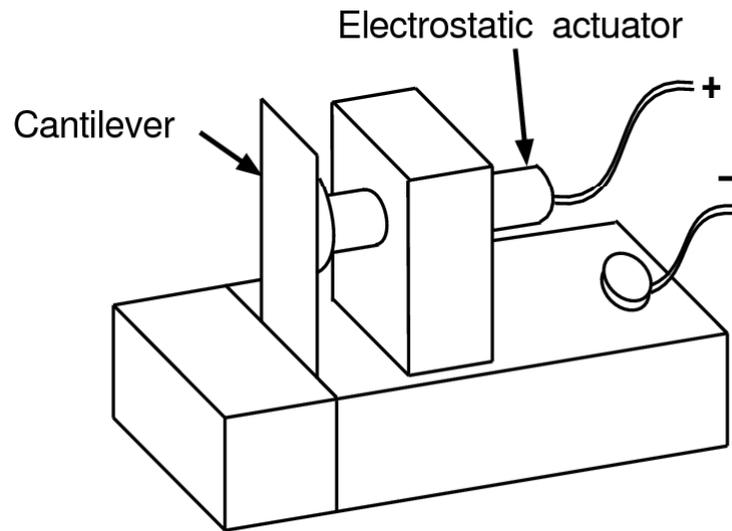
電源からの雑音(50Hzの倍数)



100Hzから10kHzくらいまで、
フラットな雑音、100Hz以下で
は雑音が増加する

1.2.1 パワースペクトル

- 微小な力学系 (Cantilever) の熱振動



基本共振モード(246.9Hz)の
スペクトル

1.2.2 自己相関関数とWiener-Khintchineの定理

- パワースペクトル: 周波数領域表示
- 時間領域での表示法: 自己相関関数 $R(\tau)$

$$R(\tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle$$

- 一般的な性質

$$R(0) = \langle x(t)^2 \rangle = \sigma^2$$

$$R(-\tau) = \langle x(t)x(t - \tau) \rangle$$

$$= \langle x(t - \tau + \tau)x(t - \tau) \rangle = R(\tau)$$

- 一般の関数では

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T - \tau} x(t)x(t + \tau) dt$$

- 正弦波では

$$R(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau$$

周波数の情報が得られる。

1.2.2 自己相関関数とWiener-Khintchineの定理

- パワースペクトルと自己相関関数は、同じ情報を持つ
→フーリエ変換で結ばれる。

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

- Wiener-Khintchineの定理と呼ばれている

- 例: 白色雑音 (パワースペクトルが定数)

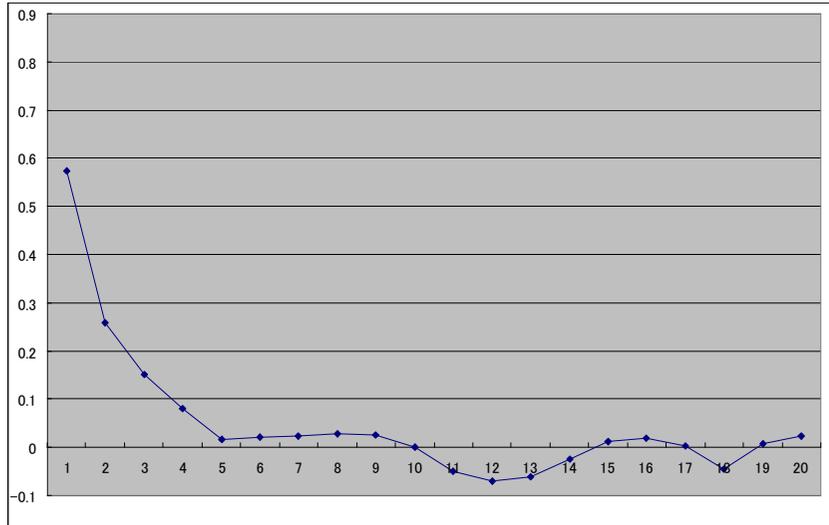
$$S(\omega) = S_0$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0 e^{i\omega\tau} d\omega = 2\pi S_0 \delta(\tau)$$

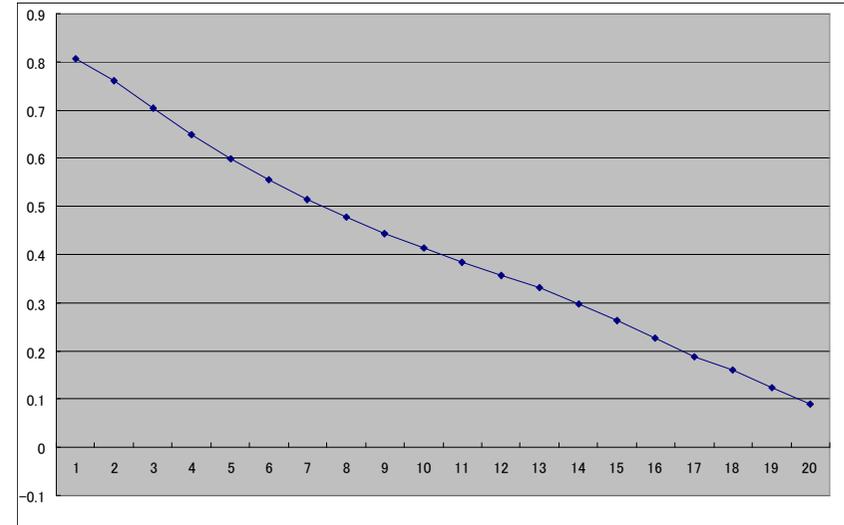
相関関数はデルタ関数

1.2.2 自己相関関数とWiener-Khintchineの定理

X_1 の自己相関関数



X_2 の自己相関関数



X_1 の自己相関関数は X_2 の自己相関関数より早く0になる。

X_1 の変動の時間スケールは X_2 より短い。

1.2.3 線形系とパワースペクトル

- 雑音の処理→電気回路: 典型的な線形系
- 入力 $x(t)$ 、出力 $y(t)$ に対して、線形の演算子で

$$\mathcal{L}[y(t)] = x(t)$$

と表わされる。

- 線形とは

$$\mathcal{L}[y_1(t)] = x_1(t)$$

$$\mathcal{L}[y_2(t)] = x_2(t)$$

に対して

$$\mathcal{L}[\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)] = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$

が成り立つ。

- 定常な場合

$$\mathcal{L}[H(\omega)e^{i\omega t}] = e^{i\omega t}$$

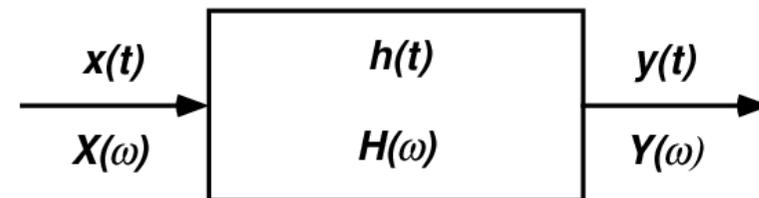
が成り立つ:

$H(\omega)$: 周波数応答関数

- $x(t)$ 、 $y(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ 、 $Y(\omega)$ を用いると

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

が成り立つ。



1.2.3 線形系とパワースペクトル

- 時間領域では、

$$\mathcal{L}[h(t)] = \delta(t)$$

を満たす

$h(t)$: インパルス応答関数

- 入力と出力の関係は

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-t')x(t')dt'$$

と表わすことができる。この時、

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

という関係がある。

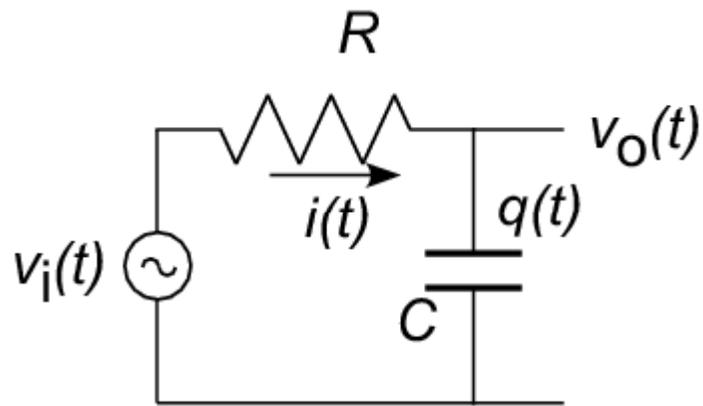
- 雑音を入力した場合には、入力
と出力のパワースペクトル $S_x(\omega)$
と $S_y(\omega)$ の間には

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$$

の関係が成り立つ。

1.2.3 線形系とパワースペクトル

- 線形系の例: RCローパスフィルタ



$$x(t) = v_i(t), y(t) = v_o(t)$$

$$Ri + \frac{q}{C} = v_i, \quad \dot{q} = i, \quad v_o = q/C$$

- 方程式を整理すると

$$RC \frac{dv_o}{dt} + v_o = v_i$$

$$v_i(t) = e^{i\omega t}, v_o(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC}$$

が得られる。

- 白色雑音を入力すると

$$S_i(\omega) = S_0 \rightarrow S_o(\omega) = \frac{S_0}{1 + (\omega RC)^2}$$

となる。

1.2.3 線形系とパワースペクトル

- 白色雑音: 分散が発散

$$\sigma_i^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_0 d\omega \rightarrow \infty$$

- ローパスフィルターの出力: 有限な値になる

$$\begin{aligned}\sigma_o^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_0}{1 + (RC\omega)^2} d\omega \\ &= \frac{S_0}{RC} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{\pi S_0}{RC}\end{aligned}$$

- 自己相関関数

$$\begin{aligned}R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_0 e^{i\omega\tau}}{1 + (RC\omega)^2} d\omega \\ &= \frac{S_0}{RC} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix\tau/RC)}{1 + x^2} dx \\ &= \frac{\pi S_0}{RC} \exp\left(-\frac{|\tau|}{RC}\right)\end{aligned}$$

1.2.4 Langevin方程式

- 確率過程の時間発展
Langevin方程式
確率微分方程式
- 通常の微分方程式 + 揺動力 (ランダムな力) で表わす。
- 例: 流体中の粒子の運動
 - 粘性の影響
 - 周囲からのランダム力: ブラウン運動
- 運動方程式 (v : 粒子の速度)

$$m \frac{dv}{dt} = -m\gamma v$$

- 右辺: 粘性力
 - 球形粒子: ストークスの法則
 - $m\gamma = 6\pi\eta a$ (η は粘性率)
- この方程式の解は

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t}$$

であり、すぐに止まってしまふ。

- ブラウン運動するためには

$$m \frac{dv}{dt} = -m\gamma v + f_B(t)$$

で表わされる揺動力 f_B が必要

1.2.4 Langevin方程式

- 揺動力の性質

- 平均値は0

$$\langle f_B(t) \rangle = 0$$

- 白色雑音

$$\langle f_B(t) f_B(t') \rangle = 2D\delta(t - t')$$

$$S_B = \frac{D}{\pi}$$

- 運動方程式は線形

$$m(i\omega + \gamma)V(\omega) = F_B(\omega)$$

- 周波数応答関数は

$$H(\omega) = \frac{V(\omega)}{F_B(\omega)} = \frac{1}{m(i\omega + \gamma)}$$

- 速度のスペクトルは

$$S_v(\omega) = \frac{D}{\pi m^2(\omega^2 + \gamma^2)}$$

となり、速度の2乗平均は

$$\langle v^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D}{\pi m^2(\omega^2 + \gamma^2)} d\omega = \frac{D}{m^2\gamma}$$

- エネルギー等分配則から

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

が成り立つ。したがって、

$$D = m\gamma k_B T$$

となる。

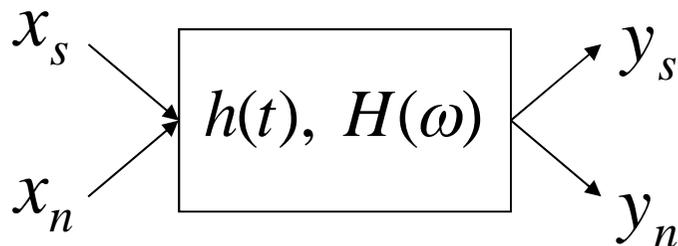
アインシュタインの関係

1.3 信号雑音比と測定帯域

- 信号と雑音 $x = x_s + x_n$
- 信号雑音比 (Signal-to-noise ratio, SNR)

$$\text{SNR} = \frac{x_s(t)^2}{\langle x_n^2 \rangle}$$

- フィルター: 線形系
 - 入力: x 、出力: y



- フィルターによる影響:
- 出力のS/N

$$\text{SNR} = \frac{y(t)^2}{\langle y_n^2 \rangle} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega}$$

- 信号が正弦波に近い場合
 - $y(t)^2 \approx |H(2\pi f_0)|^2 x(t)^2$
- 雑音はフラット

$$\begin{aligned} \langle y_n^2 \rangle &= \int_0^{\infty} |H(2\pi f)|^2 G_x(f) df \\ &\sim G_x(f_0) \int_0^{\infty} |H(2\pi f)|^2 df \\ &= |H(2\pi f_0)|^2 G_x(f_0) \Delta f \end{aligned}$$

1.3 信号雑音比と測定帯域

- SNR

$$\text{SNR} \sim \frac{x(t)^2}{G_x(f_0)\Delta f}$$

- 等価雑音帯域幅 Δf

$$\Delta f = \frac{\int_0^\infty |H(2\pi f)|^2 df}{|H(2\pi f_0)|^2}$$

帯域を狭めるとSNRは向上するが、信号が純粋な正弦波でなく、広がったスペクトルを持つ場合、帯域を狭くすることには制限がある。

- Matched Filter: 信号の性質に合わせて最適のSNRが得られる

$$A(\omega) = H(\omega)\sqrt{S_x(\omega)}$$

$$B(\omega) = X(\omega)e^{i\omega t} / \sqrt{S_x(\omega)}$$

Cauchy-Schwarzの不等式

$$\left| \int A(\omega)B(\omega)d\omega \right|^2 \leq \int |A(\omega)|^2 d\omega \int |B(\omega)|^2 d\omega$$

$$\text{SNR} \leq \int \frac{|X(\omega)|^2}{S_x(\omega)} d\omega$$

$$A = B^* \longrightarrow H_{\text{opt}} = \frac{X^*(\omega)e^{-i\omega t}}{S_x(\omega)}$$

1.3 信号雑音比と測定帯域

- 信号が直流の場合
 - 時間平均

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(t') dt'$$

$$\rightarrow H(\omega) = \frac{1 - e^{-i\omega T}}{i\omega T}$$

$$\Delta f = \frac{\int_0^\infty |H(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}}{|H(0)|^2} = \frac{1}{2T}$$

- 1次ローパス

$$y(t) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')/\tau} x(t') dt'$$

$$\rightarrow H(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau}$$

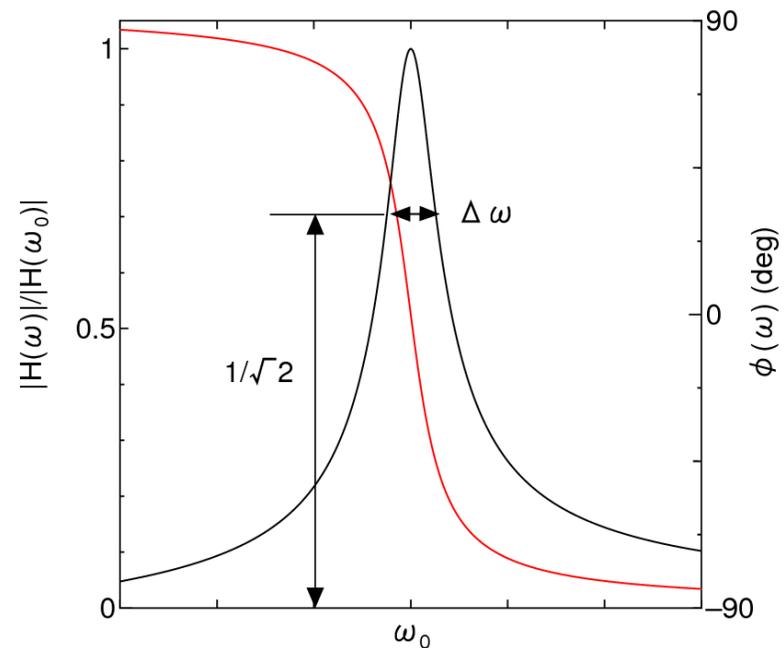
$$\Delta f = \frac{\int_0^\infty |H(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}}{|H(0)|^2} = \frac{1}{4\tau}$$

1.3 信号雑音比と測定帯域

- 交流信号の場合
 - バンドパスフィルター

$$H(\omega) = \frac{i\omega\omega_0 / Q}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\omega_0 / Q}$$

$$\Delta f = \frac{\int_0^\infty |H(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}}{|H(\omega_0)|^2} = \frac{\omega_0}{4Q}$$



$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$