『電磁気学第２』参考資料 問題解答

【グリーン関数とラプラス方程式・波動方程式】

1. コンデンサーの両端の電圧を v_C とすると、回路を流れる電流 i は $i = C\dot{v}_\mathrm{C}$ である。そして、コイルの両端の電圧は $L\dot{i}$ なので、回路系の方程式は

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 v_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} + v_\mathrm{C} = v_\mathrm{i} \tag{1}$$

となる。そして、グリーン関数の方程式は

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} + G = \delta(t) \tag{2}$$

である。この両辺を Founrier 変換して、周波数応答関数の式を求めると

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 LC + \mathrm{i}\omega RC + 1} \tag{3}$$

である。ここで、${\omega_0}^2 = 1/(LC)$、$1/Q = R\sqrt{C/L}$ とおくと

$$H(\omega) = \frac{{\omega_0}^2}{-\omega^2 + \mathrm{i}\omega\omega_0/Q + {\omega_0}^2} \tag{4}$$

と書ける。これを逆変換すると

$$G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{{\omega_0}^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega}{-\omega^2 + \mathrm{i}\omega\omega_0/Q + {\omega_0}^2} \tag{5}$$

である。この計算を複素積分で行うと、極の位置は

$$\omega = \mathrm{i}\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega' \quad \left(\omega' = \omega_0\sqrt{1 - 1/(4Q^2)}\right) \tag{6}$$

で共に上半面にある。ここで、$Q > 1/2$ とした。積分は $t < 0$ の時は下半面を回る積分で計算し 0 となる。$t > 0$ では、上半面の回る積分で、両方の極の寄与を拾うと

$$G(t) = \frac{{\omega_0}^2}{\omega'}\exp(-\frac{\omega_0 t}{2Q})\sin\omega' t \tag{7}$$

である。もし、$Q < 1/2$ のときは、$\omega'' = \mathrm{i}\omega'$ とすればよい。$\sin\mathrm{i}x = \mathrm{i}\sinh x$ だから、

$$G(t) = \frac{{\omega_0}^2}{\omega''}\exp(-\frac{\omega_0 t}{2Q})\sinh\omega'' t \tag{8}$$

である。また、$Q = 1/2$ の時は $Q \to 1/2$ の極限を取ると

$$G(t) = {\omega_0}^2 t\exp(-\omega_0 t) \tag{9}$$

である。いずれにしろ、極は上半面にしかないので、$t < 0$ では $G = 0$ である。

2. 式 (9) をフーリエ変換すると

$$(\mathrm{i}\omega\tau + 1)V_\mathrm{c}(\omega) = V_\mathrm{i}(\omega) \tag{10}$$

で、$V_\mathrm{c}(\omega)=H(\omega)V_\mathrm{i}(\omega)$ だから、

$$H(\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{i}\omega\tau} \tag{11}$$

となる。ここで、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\left.v_\mathrm{c}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}v_\mathrm{c}\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\mathrm{i}\omega V_\mathrm{c}(\omega) \tag{12}$$

という関係を用いた。これを逆フーリエ変換すれば、式 (22) が求まる。

3. 球の内部の $\mathbf{r}'$ という点に点電荷 q を置くと、鏡像電荷 $q'=-qa/r'$ を $\mathbf{r}''=a^2\mathbf{r}'/r'^2$ の点に置けば境界条件が満たされる。従って、グリーン関数は

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}-\frac{a}{r'|\mathbf{r}-a^2\mathbf{r}'/r'^2|}\right) \tag{13}$$

である。

4. 直交関係を用いて

$$\begin{aligned}g_n(z')&=\int_0^L G(z|z')u_n(z)\mathrm{d}z\\&=\sqrt{\frac{2}{L}}\left(\frac{L-z'}{L}\int_0^{z'}z\sin k_n(z)\mathrm{d}z+z'\int_{z'}^{L}\frac{L-z}{L}\sin k_n(z)\mathrm{d}z\right)=\frac{u_n(z')}{{k_n}^2}\end{aligned} \tag{14}$$

5. 略

6. 略

7. $g(t)=\theta(t)\sin\omega t$ とすると

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=\delta(t)\sin\omega t+\omega\theta(t)\cos\omega t=\omega\theta(t)\cos\omega t \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}t^2}=\omega\delta(t)\cos\omega t-\omega^2\theta(t)\sin\omega t=\omega\delta(t)-\omega^2g \tag{16}$$

よって、

$$\frac{1}{\omega}\left(\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2g\right)=\delta(t) \tag{17}$$

で、題意を満たす。

8. 前問の結果を用いると

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{K^2-(\omega/c)^2}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}=\frac{c}{K}\theta(t)\sin(cKt) \tag{18}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}G(R,t)&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}K\mathrm{d}K\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}KR}}{\mathrm{i}R}\frac{c}{K}\theta(t)\sin(cKt)\\&=-\frac{c\theta(t)}{8\pi^2R}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}K[\mathrm{e}^{\mathrm{i}K(R+ct)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}K(R-ct)}]\\&=-\frac{c\theta(t)}{4\pi R}[\delta(R+ct)-\delta(R-ct)]\end{aligned} \tag{19}$$

となるが、$R>0$ かつ $t>0$ なので、結局

$$G(R,t)=\frac{c}{4\pi R}\delta(R-ct)=\frac{1}{4\pi R}\delta(t-R/c) \tag{20}$$

となって、遅延ポテンシャルが得られる。

9. スカラーポテンシャルの時間微分は

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\partial\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{\partial t}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{21}$$

で計算できるが、ベクトルポテンシャルの計算は面倒である。まず、遅延グリーン関数の表記に戻ると

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\mathrm{d}t'\int\mathrm{d}^3\mathbf{r}'i^k(\mathbf{r}',t)\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \tag{22}$$

と書ける。上の式では x^k は $x^k-x'^k$ の形だけで含まれているので、

$$\begin{aligned} i^k(\mathbf{r}',t)\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)&=-i^k(\mathbf{r}',t)\frac{\partial}{\partial x'^k}\left(\frac{\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\\ =-\frac{\partial}{\partial x'^k}\left(i^k(\mathbf{r}',t)\frac{\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)&+\left(\frac{\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\frac{\partial i^k(\mathbf{r}',t)}{\partial x'^k} \end{aligned} \tag{23}$$

と書き直し、最初の項は表面積分に変換すると 0 になるので、後の項だけを計算すると

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\mathrm{d}t'\int\mathrm{d}^3\mathbf{r}'\operatorname{div}\mathbf{i}(\mathbf{r}',t)\frac{\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\mathrm{d}^3\mathbf{r}'\frac{\operatorname{div}\mathbf{i}(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{24}$$

と書ける。この式と式 (21)、電荷の保存則を用いれば、ローレンツ条件が満たされることが分かる。