『電磁気学第２』参考資料

【グリーン関数とラプラス方程式・波動方程式】

1　グリーン関数

電磁気学では、電磁場の源になる電荷分布や電流分布を与えて、ラプラスーポアソン方程式や波動方程式を解くことが多い。そこで活躍するのがグリーン関数である。また、電気回路に代表される線形応答系の性質を調べる上でも非常に重要である。まず、回路系や力学系の時間発展を追いかける場合を考えよう。系が線形の演算子 $\mathcal{L}$ によって

$$\mathcal{L}\left[p(t)\right] = q(t) \tag{1}$$

という方程式で表されるとする。ここで、$\mathcal{L}$ が線形とは、

$$\mathcal{L}\left[p_1(t)\right] = q_1(t) \tag{2}$$

$$\mathcal{L}\left[p_2(t)\right] = q_2(t) \tag{3}$$

が成り立ち、α、β を定数としたら

$$\mathcal{L}\left[\alpha p_1(t) + \beta p_2(t)\right] = \alpha q_1(t) + \beta q_2(t) \tag{4}$$

が成り立つ場合である。そして、式 (1) の解を

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t|t')q(t')\mathrm{d}t' \tag{5}$$

と書くことができるような関数 $G(t|t')$ をグリーン関数という。この両辺に $\mathcal{L}$ を施すと

$$\mathcal{L}\left[G(t|t')\right] = \delta(t - t') \tag{6}$$

を満たす必要があることが分かる。式 (6) を見ると、時間を変数にしたグリーン関数は、時刻 $t = t'$ に δ 関数によるパルスが入力された時の系の応答と考えることができる。そこで、インパルス応答関数とも呼ばれる。これをもう少し、考えることにしよう。デルタ関数の性質

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t')\delta(t - t')\mathrm{d}t' \tag{7}$$

は、時刻 t' に $q(t')$ の大きさのインパルスがあり、これを重ねあわせたものとして $q(t)$ が表現できることを示している。そして線形系のインパルスに対する応答が G がわかっていれば、式 (4) の関係から式 (5) により解を求めることができる。求めるべき解は、入力 q と系 $\mathcal{L}$ の 2 つの性質で決まっている。しかし、基本的でしかも簡単に解が求まる入力を使って系の性質のみを抜き出したものがあれば、それを使って一般的な入力に対する解を求めることができるのである。インパルス応答関数（グリーン関数）は、その一つの例である。

1.1　簡単な例

一番簡単な例として、抵抗とコンデンサーの直列回路に電圧 $v_{\mathrm{i}}(t)$ の電源を繋ぎ、コンデンサーの両端の電圧 $v_{\mathrm{C}}(t)$ を測定する場合を解く（図 1）。この時の方程式は

$$Ri + \frac{q}{C} = v_{\mathrm{i}},\ \ \dot{q} = i,\ \ v_{\mathrm{C}} = q/C \tag{8}$$

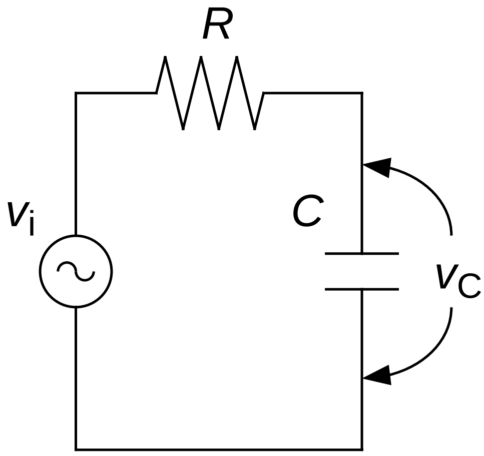

図 1: 抵抗とコンデンサーの直列回路

で、$\tau = RC$ として、整理すると

$$\tau \frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} + v_{\mathrm{C}} = v_{\mathrm{i}} \tag{9}$$

となる。この解は、定数変化法を用いると簡単に解ける。すなわち、$v_{\mathrm{i}} = 0$ の時の解、$v_{\mathrm{C}} = a \exp(-t/\tau)$ の a を時間の関数 $a(t)$ として、式 (9) に代入する。すると、

$$\tau \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-t/\tau} = v_{\mathrm{i}}(t) \tag{10}$$

が得られる。これは簡単に積分できて

$$a(t) = a_0 + \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t} v_{\mathrm{i}}(t') \mathrm{e}^{t'/\tau} \mathrm{d}t' \tag{11}$$

となる。だから、

$$v_{\mathrm{C}}(t) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(t-t')/\tau} v_{\mathrm{i}}(t') \mathrm{d}t' \tag{12}$$

である。ただし、条件は $v_{\mathrm{c}} = 0$ $(t \to -\infty)$ とした。この式をみると

$$G(t|t') = \frac{1}{\tau} \theta(t-t') \mathrm{e}^{-(t-t')/\tau} \tag{13}$$

とすればいいことがわかる。ここで、$\theta(t)$ は

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{14}$$

で定義される階段関数である。グリーン関数が $t - t' < 0$ で値が 0 となるのはインパルスによる刺激をうけない時は何も起きないという意味である。これは、インパルスが原因になり、その結果として応答が起きるという因果律を表現している。一般に、因果律を満たす系では $t - t' < 0$ で $G = 0$ でなければならない。もちろん、グリーン関数には初期条件を満たすパラメータが無い。したがって、得られる解は特解である。そのため、斉次の方程式（$\mathcal{L}[p] = 0$）の解を付け加えて、解を構成しないといけない。ただ、因果律を満たす系が定常的な場合は、十分時間が経過すると、初期条件の情報は失われてしまい、入力に対する出力が表れるようになる。物理では、ある入力に対する出力を調べて系の情報を得る、つまり、q を与えて、p を測定し $\mathcal{L}$ がどのような性質を持つかを調べる場合が多い。この場合は、初期条件はあまり意味が無いので、特解だけを考えておけば十分である。

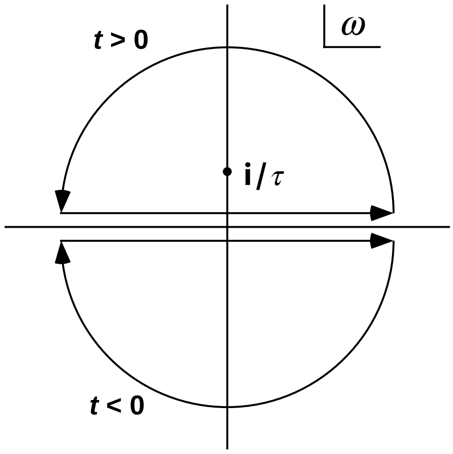

図 2: グリーン関数を求める際の積分路

1.2 フーリエ変換による解法と周波数応答関数

しかし、今のような方法は一般的ではない。考えている系が定常的な場合、一番応用範囲が広いのはフーリエ変換を使う方法である。$x(t)$ という関数のフーリエ変換 $X(\omega)$ は

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{15}$$

で定義され、逆フーリエ変換は

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{16}$$

である[1]。グリーン関数は

$$\tau\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} + G = \delta(t) \tag{17}$$

を満たさなければならない[2]。この式の両辺をフーリエ変換すると

$$(\mathrm{i}\omega\tau + 1)H(\omega) = 1 \tag{18}$$

となる。ここで、$H(\omega)$ は $G(t)$ のフーリエ変換で、これを解けば、

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{i}\omega\tau} \tag{19}$$

である。従って、この逆変換を行うと

$$G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{1 + \mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega \tag{20}$$

である。この積分は留数を計算するだけであるが、t の符号によって、積分路を ω 平面の上半面に取る（$t > 0$）か下半面に取る（$t < 0$）かを変える必要がある（図 2）。今、極の位置は i/τ で上半面にあるだけだから、下半面で積分を行う場合は 0 となり、上半面では留数を計算すると、式 (13) と同じ結果が得られる。ところで、$H(\omega)$ は、$v_{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ とした時、$v_{\mathrm{c}} = H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ となるものである。つまり、正弦波を入力し

[1] $1/2\pi$ の因子の付け方や指数関数の符号などは教科書によってまちまちになっているので気を付けること。
[2] 方程式が時間の平行移動に対して不変なので $t - t'$ を t と考えて計算すればよい。

たときの、出力の正弦波の振幅と位相を表していて、周波数応答関数と呼ばれる。そして、因果律を満たす系では $H(\omega)$ の極は、上半面にしか存在しないことが分かる。また、$v_{\mathrm{i}}(t)$ のフーリエ変換を $V_{\mathrm{i}}(\omega)$ とすると、

$$v_{\mathrm{i}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V_{\mathrm{i}}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{21}$$

$$v_{\mathrm{c}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)V_{\mathrm{i}}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{22}$$

と書ける。つまり、$v_{\mathrm{i}}(t)$ は、$V_{\mathrm{i}}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ という正弦波の重ねあわせで表すことができ、正弦波に対する系の応答が $H(\omega)$ となることがわかっているので、出力はその重ねあわせで書くことができる。この考え方も、インパルス応答を考える場合と同じで入力と系の性質を分けて考えていることになる。さらに、普通の線形系は、有限次数の微分や積分の組み合わせで書かれるため、正弦波に対する応答を求めるのは非常に易しい。つまり

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \to \mathrm{i}\omega, \qquad \int \mathrm{d}t \to \frac{1}{\mathrm{i}\omega}$$

という形式的な対応により、微分方程式が代数方程式に変換されるからである。さらに、代数方程式の解から、時間の関数を求める場合は、複素積分を実行することに帰着され、系統的な取り扱いが可能になる。線形系の典型的な例である電気回路では、その特性などについてはこの周波数応答関数で議論される方が多い。

2 ラプラス－ポアソン方程式のグリーン関数

静電気学では、電場はスカラーポテンシャル ϕ を、

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{23}$$

を適当な境界条件で解くと全てが決まる。最も一般的な条件は、無限遠で $\phi = 0$ というものである。この時、解は点電荷によるポテンシャルの重ね合わせで

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{24}$$

となることは良く知られている。これはまさにグリーン関数を使った解の表現である。すなわち、

$$\frac{1}{4\pi}\Delta\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{25}$$

を満たすのである。ここで、

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \tag{26}$$

を意味している。ここでも、フーリエ変換を使ってグリーン関数を求めてみよう。今度は、時間ではなく空間座標でフーリエ変換を行う。つまり、

$$U(\mathbf{K}) = \int u(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{d}^3\mathbf{r} \tag{27}$$

$$u(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int U(\mathbf{K})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{d}^3\mathbf{K} \tag{28}$$

で定義する。また、ラプラス方程式のグリーン関数は

$$\Delta G = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{29}$$

であるから[3]、

$$G(\mathbf{R}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \mathrm{d}\mathbf{K} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}}{K^2} \tag{30}$$

となる。ここで、$K^2 = \mathbf{K}^2$、$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ である。この積分は、$\mathbf{K}$ と $\mathbf{R}$ のなす角度を θ とすれば $\mathrm{d}^3\mathbf{K} = 2\pi K^2 \mathrm{d}K \sin\theta \mathrm{d}\theta$、$\mathbf{K}\cdot\mathbf{R} = KR\cos\theta$ であるから

$$G(\mathbf{R}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^\infty K^2 \mathrm{d}K \int_0^\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}KR\cos\theta}}{K^2} = \frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^\infty \frac{\sin KR}{K} \mathrm{d}K \tag{31}$$

と計算できる。そして、

$$\int_0^\infty \frac{\sin KR}{K} \mathrm{d}K = \frac{\pi}{2} \tag{32}$$

だから、

$$G(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi R} \tag{33}$$

となり、式 (25) の結果と一致する。しかし、式 (24) などは、電場の線形性とクーロンの法則から物理的な考察により導かれる。つまり、ある電荷分布を与えた時の電場は、点電荷の作る場を重ねあわせることで計算できるわけである。結局、グリーン関数を求めるということは、点電荷の作る電場を求めることになるわけである。だから、特殊な境界条件では、フーリエ変換を使うよりも電気鏡像法を用いた方が簡単にグリーン関数を求めることができる。次の例は、空間的な境界条件を課された場合を考えよう。簡単のため、1 次元の問題を考える。すなわち、

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{\rho(z)}{\varepsilon_0} \tag{34}$$

を、$z = 0$ と $z = L$ に置かれた接地された導体で挟まれた空間を考える。この時の境界条件は、$z = 0$ と $z = L$ で $\phi = 0$ である。この問題では

$$\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}z^2} = -\delta(z - z') \tag{35}$$

を直接積分して、グリーン関数を求めることができる。 まず、階段関数 $\theta(x)$ の微分がデルタ関数になることを用いる。すなわち

$$\frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x} = \delta(x) \tag{36}$$

である。従って、

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z} = -\theta(z - z') + a \tag{37}$$

そして、この方程式の積分は、

$$\frac{\mathrm{d}(x\theta(x))}{\mathrm{d}x} = \theta(x) + x\delta(x) = \theta(x) \tag{38}$$

という関係を用いると、

$$G(z|z') = -(z - z')\theta(z - z') + az + b \tag{39}$$

である。そして、$z = 0,\ L$ で $G = 0$ とすると、$0 < z' < L$ だから

$$a = \frac{L - z'}{L},\ \ b = 0 \tag{40}$$

が求められる。これを使うと

$$G(z|z') = -(z - z')\theta(z - z') + \frac{L - z'}{L} z \tag{41}$$

[3] 前節とグリーン関数の符号が反対であることに注意すること。

$$\phi = \frac{1}{\varepsilon_0 L}\left((L-z)\int_0^z \rho(z')z'\mathrm{d}z' + z\int_z^L \rho(z')(L-z')\mathrm{d}z'\right) \tag{42}$$

と解が得られる。式 (41) を見ると、$G(z|z') \neq G(z-z')$ である。これは境界条件で、空間の並進対称性がなくなっているためである。しかし、$G(z|z') = G(z'|z)$ は満たされている。このような場合、グリーン関数を求める最も一般的な方法は、ϕ を固有関数の重ね合わせで表現する方法である。すなわち、

$$\phi(z) = \sum_n c_n u_n(z) \tag{43}$$

で書き表し、u_n は

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}z^2} + {k_n}^2 u_n = 0 \tag{44}$$

というラプラス方程式の固有方程式の解で $u_n(0) = u_n(L) = 0$ かつ、

$$\int_0^L u_n(z)u_m(z)^*\mathrm{d}z = \delta_{nm} \tag{45}$$

という関係を直交関係を満たす。今の場合、

$$u_n(z) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin k_n z \quad \left(k_n = \frac{n\pi}{L}, n = 1, 2, 3, ...\right) \tag{46}$$

である。これを式 (34) に代入して直交関係を用いると、

$$c_n = \frac{1}{\varepsilon_0 {k_n}^2}\int_0^L \rho(z')u_n(z')\mathrm{d}z' \tag{47}$$

によって係数 c_n を決定すればよいことが分かる。これを、もう一度、式 (43) に代入すると、

$$\phi(z) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_n \frac{u_n(z)}{{k_n}^2}\int_0^L \rho(z')u_n(z')\mathrm{d}z' = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^L \rho(z')\sum_n \frac{u_n(z)u_n(z')}{{k_n}^2}\mathrm{d}z' \tag{48}$$

となる。従って、

$$G(z|z') = \sum_n \frac{u_n(z)u_n(z')}{{k_n}^2} \tag{49}$$

という関係が分かる。一般の次元でも、境界条件で決まるラプラス方程式の固有関数と固有値が得られれば、グリーン関数を求めることができる。式 (41) と式 (49)、式 (48) と積分形の式 (42) は同じものを表している。

3 波動方程式

マックスウェル方程式は波動方程式に帰着され、波動解は電磁波と呼ばれている。そして、電荷密度、電流密度と境界条件を与えると電磁場が決定される。ここでは、この波動方程式の性質について調べることにする。そこで、そこで、まずスカラーの方程式

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \Delta\psi = -q(x, y, z, t) \tag{50}$$

の性質を調べてみる。

3.1　1 次元の場合

空間依存性が z だけの場合を考えてみる。もし、$q=0$ ならば、この解は

$$\psi(z,t)=g_1(z-ct)+g_2(z+ct) \tag{51}$$

で与えられる。この解は、z 軸に沿って正負方向に伝播する波動を示していて、初期条件、$t=0$ で、

$$\psi(z,0)=F(z),\quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=0}=G(z) \tag{52}$$

を用いると、

$$\psi(z,t)=\frac{1}{2}\left(F(z-ct)+F(z+ct)+\frac{1}{c}\int_{z-ct}^{z+ct}G(\xi)\mathrm{d}\xi\right) \tag{53}$$

と書ける。これは、質点の力学と同じように、初期の位置と速度を与えると後の時間発展が一意的に決まることに相当している。もし、境界条件が決められている場合は、固有関数で展開する方法が有効である。$z=0,\ L$ で $\psi=0$ という固定端の境界条件を付けるとすると、固有関数は式 (46) を用いることができる。つまり、

$$\psi(z,t)=\sum_n d_n(t)u_n(z) \tag{54}$$

である。また、$F(z)$ や $G(z)$ も $u_n(z)$ で展開できるので

$$F(z)=\sum_n f_n u_n(z),\ \ G(z)=\sum_n g_n u_n(z) \tag{55}$$

とする。これらを使うと $d_n(t)$ の満たすべき方程式は

$$\ddot{d_n}(t)+(ck_n)^2 d_n(t)=0 \tag{56}$$

で、かつ、$t=0$ で、$d_n=f_n$、$\dot{d_n}=g_n$ であることは容易に分かる。すると

$$d_n(t)=f_n\cos ck_nt+\frac{g_n}{ck_n}\sin ck_nt \tag{57}$$

となる。これを、代入して整理すると、やはり、式 (53) を満たしていることが分かる。次に、$q\neq 0$ としよう。まず、ψ、q の時間変化をフーリエ変換を使って表すとしよう。

$$q(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Q(z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{58}$$

$$\psi(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{59}$$

とする。更に、固定端の境界条件を課し、

$$Q(z,\omega) = \sum_n Q_n(\omega)u_n(z) \tag{60}$$

$$\Psi(z,\omega) = \sum_n P_n(\omega)u_n(z) \tag{61}$$

とすれば、

$$P_n(\omega)=-\frac{Q_n(\omega)}{(\omega/c)^2-{k_n}^2} \tag{62}$$

よって、

$$\Psi(z,\omega)=-\sum_n\frac{Q_n(\omega)}{(\omega/c)^2-{k_n}^2}u_n(z) \tag{63}$$

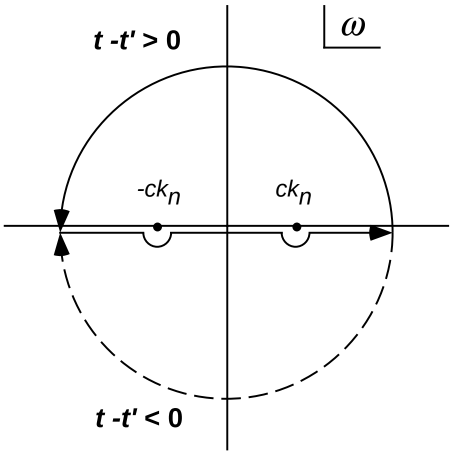

図 3: 因果律を満たす波動方程式のグリーン関数を求める積分路

となる。したがって、$\omega \sim ck_n$ となると、その固有モードの振幅が非常に大きくなることが分かる[4]。これは、調和振動子の共振現象と全く同じで現象である。これを ω について重ね合わせて、

$$\psi(z,t) = \int_0^L \mathrm{d}z' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' G(z,t|z',t') q(z',t') \tag{64}$$

$$G(z,t|z',t') = -\sum_n u_n(z) u_n(z') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t')}}{(\omega/c)^2 - {k_n}^2} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \tag{65}$$

と書くことができるので、グリーン関数が得られる。しかし、この積分は $\omega = ck_n$ の点で発散する。これは、元々の方程式が、時間の反転に対して不変、すなわち、$t \to -t$ としても方程式の形が変わらないためである。そのため、自分が考えている現象を見るには、積分路または極の位置を僅かに変更する必要がある。そして、その変更の仕方で解の性質が変わる。例えば、q が原因で起きる波動現象を観測するなら、因果律を考え、図 3のように $t - t' < 0$ の時には、$G = 0$ になるように変更する。この積分は一般的に

$$g_{\mathrm{causal}}(\omega, t-t') = \lim_{\epsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega'(t-t')}}{(\omega' - \mathrm{i}\epsilon)^2 - \omega^2} \frac{\mathrm{d}\omega'}{2\pi} = -\frac{1}{\omega} \theta(t-t') \sin\omega(t-t') \tag{66}$$

のように計算できるので、

$$G(z,t|z',t') = -c^2 \sum_n u_n(z) u_n(z') g_{\mathrm{causal}}(ck_n, t-t') \tag{67}$$

と表される。このような議論は 3 次元の波動方程式の場合にも行う。

3.2　3 次元の場合

まず、$q = 0$ の場合を考える。さらに、球対称な場合では、

$$\Delta\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial r^2} \tag{68}$$

となる。そこで $\zeta = r\psi$ とすれば、波動方程式は

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} = 0 \tag{69}$$

[4] 実際の振動では、固有モードには損失が伴い、$\omega = ck_n$ となっても振幅が無限大にはならない。

と書ける。そして、$\zeta = f_1(r-ct) + f_2(r+ct)$ で解が与えられるから、ψ は

$$\psi = \frac{f_1(r-ct)}{r} + \frac{f_2(r+ct)}{r} \tag{70}$$

という形になる。これは、振幅が $1/r$ に比例し、原点から広がる波 $f_1(r-ct)$ と原点に集まる波 $f_2(r+ct)$ を表す。これらは球面波と呼ばれている。次に、一般の 3 次元の波動方程式に対するグリーン関数を考えよう。この場合は、

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \Delta G = -\delta(t-t')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{71}$$

を解くことになる。まず、時間成分をフーリエ変換すると

$$(\Delta + k^2)G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \omega) = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \ \ (k = \omega/c) \tag{72}$$

となる。この方程式はヘルムホルツ方程式と呼ばれている。更に、無限遠で 0 という境界条件をつけて、空間座標にもフーリエ変換を施すと

$$G(\mathbf{K}, \omega) = \frac{1}{\mathbf{K}^2 - k^2} \tag{73}$$

である。この逆変換をすると、

$$G(\mathbf{R}, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \mathrm{d}^3\mathbf{K} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}}{\mathbf{K}^2 - k^2} \tag{74}$$

である。ラプラス方程式の時と同じように K 空間の極座標で積分を行うと

$$G(\mathbf{R}, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^\infty K\mathrm{d}K \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}KR} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}KR}}{\mathrm{i}R(K^2 - k^2)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^\infty K\mathrm{d}K \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}KR}}{\mathrm{i}R(K^2 - k^2)} \tag{75}$$

という積分に到達する。$R > 0$ なので、積分は K 複素平面の上半面で計算を行うが、極が実軸上、$K = \pm k$ に存在するのでこのままでは積分ができない。そこで、図 4のように、積分路を僅かにずらす。式で書けば、たとえば、$k \to k + \mathrm{i}\epsilon$ として、積分を計算したあとで $\epsilon \to +0$ とすると、$K = k$ の位置の極の寄与が残り、

$$G(R, \omega) = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} \tag{76}$$

が得られ (a)、$\epsilon \to -0$ とすれば $K = -k$ の位置の極の寄与で、

$$G(R, \omega) = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}}{R} \tag{77}$$

が得られる (b)。また、主値をとれば、両方の極の寄与が半分ずつ足されて、

$$G(R, \omega) = \frac{1}{4\pi}\frac{\cos kR}{R} \tag{78}$$

などが得られる (c)。このように、グリーン関数が一つに決まらないのは、波動方程式では時間発展の情報を与えないと解が決まらないということに対応している。これらの式は $k \to 0$ の極限で、ラプラス方程式のグリーン関数、$1/(4\pi R)$ に帰着される。すなわち

$$G(R, \omega) = \frac{1}{4\pi}\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}}{R} \ \ (A + B = 1) \tag{79}$$

ならばよく、$R = 0$ で特異性をもち、これがグリーン関数の本質的な点である。この式はさらに

$$G(R, \omega) = \frac{1}{4\pi}\frac{\cos kR}{R} + \mathrm{i}\frac{A-B}{4\pi}\frac{\sin kR}{R} \tag{80}$$

と書ける。右辺第 2 項は $R = 0$ でも特異性がなく、斉次方程式の解であるので、任意の係数をかけて加えても、グリーン関数としての条件を満たす。しかし、加え方で解の性質が変わるので、境界条件を考えて

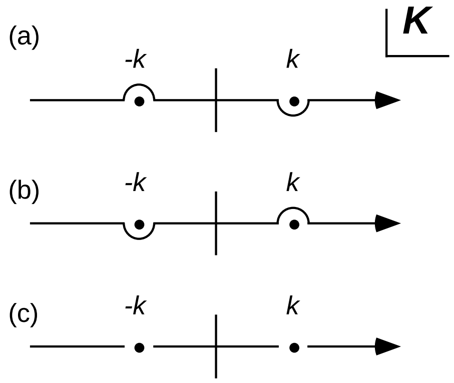

図 4: 3 次元のヘルムホルツ方程式のグリーン関数を求める際の積分路。(a)$K = k$ の極、(b))$K = -k$ の極、(c) 主値を計算する場合の図である。時間を変動を $\exp(\mathrm{i}\omega t)$ で考えているので、(a) は内向き、(b) は外向きの波を表す。

係数を決める必要がある。式 (76)、式 (77)、式 (78) などは、この操作を積分路を適当に変更するということで行っているのである。ここから、最終的に波動方程式のグリーン関数を求めるには時間成分の逆フーリエ変換を行う必要がある。すなわち、

$$G(R,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(R,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{81}$$

を行う必要がある。ここで、デルタ関数の公式

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}p \tag{82}$$

を思い出すと、式 (76) からは、

$$G_{\mathrm{adv}}(R,t) = \frac{1}{4\pi R}\delta(t + R/c) \tag{83}$$

式 (77) からは、

$$G_{\mathrm{ret}}(R,t) = \frac{1}{4\pi R}\delta(t - R/c) \tag{84}$$

という式が得られる。最初のものは先進グリーン関数、後のものは遅延グリーン関数と呼ばれている。逆フーリエ変換をする前の式をみると、時間依存性が $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ で表されているので、式 (76) は外から中心に向う球面波、式 (77) は中心から外側に向かう球面波を表している。これを時間領域で考えると、先進グリーン関数は、外からの影響が観測点を通過してから中心に伝わる現象を表している。また、遅延グリーン関数は中心での変動が外向きに伝わって観測点に到達する場合を表している。これらは共に波動の伝播現象を表しているが、例えば、電荷・電流の変動が原因となって電磁波が発生するような現象を記述するためには、因果律を考慮すると遅延グリーン関数を用いるのが適当である。この遅延グリーン関数を用いると、非斉次の波動方程式の解は

$$\psi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{q(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{85}$$

と書くことができる。マックスウェル方程式は、ローレンツゲージでのポテンシャルを用いて

$$\Box\,\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{86}$$

$$\Box\,\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{i} \tag{87}$$

と書くことができるが、この波動方程式の解は

$$
\begin{aligned}
\phi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}', t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' && (88)\\
\mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' && (89)
\end{aligned}
$$

と書くことができる。これを遅延ポテンシャルと呼んでいる。また、これら式は電荷の保存法則

$$
\mathrm{div}\,\mathbf{i}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{90}
$$

を使うとローレンツ条件

$$
\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathrm{div}\,\mathbf{A}=0 \tag{91}
$$

を満たしていることが示される。

参考文献

[1] 平川浩正：「電気力学」（培風館、1973 年）.

[2] 今村勤：「物理とフーリエ変換」（岩波書店、1978 年）.

[3] 今村勤：「物理とグリーン関数」（岩波書店、1978 年）.

問題

1. 図 5の回路ように、コイル（インダクタンス L）を加えて、直列共振回路を作った場合の方程式を作り、入力電圧 v_{i} に対するコンデンサー両端の電圧 V_{C} を与えるグリーン関数を求めよ。また、周波数応答関数はどうなるか。

2. 式 (9) の両辺にフーリエ変換を行うことで、式 (22) を直接導け。

3. 3 次元のラプラス方程式で、無限遠で 0 となる境界条件の代わりに、半径 a の接地された金属球殻の内部での静電場を求めるためのグリーン関数を求めよ。

4. 式 (41) を z の関数と考え、式 (46) の固有関数を用いると展開係数を z' の関数として求めることができる。この計算を行ない、式 (49) が成り立つことを示せ。

5. 式 (42) を実際に式 (34) に代入し、解となっていることを示せ。

6. 式 (57) を式 (54) に代入して、整理すると式 (53) の形に書けることを示せ。

7. 式 (66) は共振周波数 ω の調和振動子の運動方程式のグリーン関数となっていることを示せ（但し、符号が第 1 節と反対である）。

8. 式 (75) の K の積分を残したままで、ω に対する逆フーリエ変換を行うと

$$
G(R,t)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}K\mathrm{d}K\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}KR}}{\mathrm{i}R}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{K^2-(\omega/c)^2}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \tag{92}
$$

となる。この式を因果律をみたすように積分すると、遅延グリーン関数が得られることを示せ。

9. 式 (88) と式 (89) は、確かにローレンツゲージの条件式、式 (91) を満たしていることを示せ。

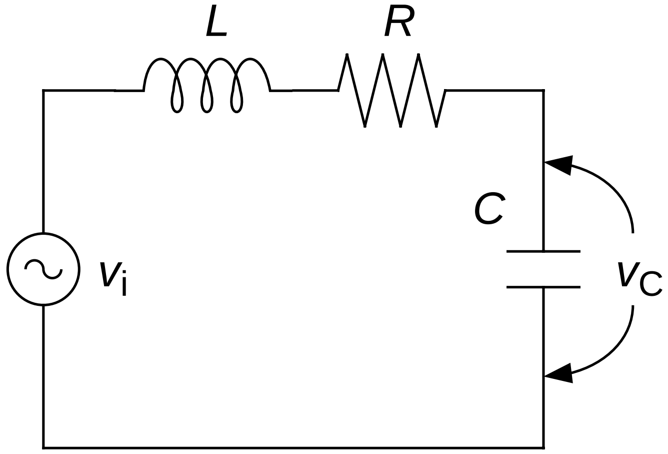

図 5: コイル、抵抗とコンデンサーの直列回路