『電磁気学第２』参考資料 問題解答

【特殊相対論】

1. 求める変換行列を $\mathbf{L}$ とする。これは単純なローレンツ変換と回転変換の組み合わせで

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{R} \tag{1}$$

のように書ける。$V = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2}$、$\tan\theta = V_y/V_x$、$\gamma = 1/\sqrt{1-(V/c)^2}$ とすると、

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V/c & 0 & 0 \\ -\gamma V/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

となる。よって、

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V_x/c & -\gamma V_y/c & 0 \\ -\gamma V_x/c & (\gamma {V_x}^2 + {V_y}^2)/V^2 & V_x V_y(\gamma-1)/V^2 & 0 \\ -\gamma V_y/c & V_x V_y(\gamma-1)/V^2 & (\gamma {V_y}^2 + {V_x}^2)/V^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

である。一般に $\mathbf{V}$ の方向へのローレンツ変換は

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\mathbf{V}/c \\ -\gamma\mathbf{V}/c & \mathbf{I} + \mathbf{V}\circ\mathbf{V}(\gamma-1)/V^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

で表される。ここで、$\mathbf{V}\circ\mathbf{V}$ は V_iV_j を要素とするテンソルである。

2. 略

3. 解くべき方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \Lambda, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = 0 \tag{5}$$

である。ここで、$\Lambda = qE/m$、$\beta^2 = ({v_x}^2 + {v_y}^2)/c^2$ である。初期条件を考慮して、積分すると

$$\frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \Lambda t, \quad \frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} = v_0/\sqrt{1-(v_0/c)^2} \tag{6}$$

となる。これを β について解き、整理すると

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{(\Lambda t/c)^2 + \frac{1}{1-{\beta_0}^2}} \quad (\beta_0 = v_0/c) \tag{7}$$

となる。これを使って積分すると、

$$x = (c/\Lambda)\sqrt{(\Lambda t/c)^2 + \frac{1}{1-{\beta_0}^2}} + const \tag{8}$$

$$y = \frac{\beta_0}{\sqrt{1-{\beta_0}^2}}(c/\Lambda)\log\left(\Lambda t/c + \sqrt{(\Lambda t/c)^2 + \frac{1}{1-{\beta_0}^2}}\right) + const \tag{9}$$

4. この系は中心力の場であるから、$\mathbf{p}$ を相対論的な運動量として、角運動量を $\boldsymbol{\ell}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ で与えると保存する（証明して見よ）。このため、軌道は一つの平面内にある。そこで、この平面内の極座標を使うと、ラグランジュ関数は

$$L=-mc^2\sqrt{1-(\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2)/c^2}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{10}$$

となり、運動方程式を作ると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\dot{r}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}+m\frac{r\dot{\theta}^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mr^2\dot{\theta}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = 0 \tag{12}$$

となる。ここで、$\beta^2=(\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2)/c^2$ である。あとは、重力場中の運動と同じように、$u=1/r$ を用い、独立変数を t から θ に変換すると、

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=\frac{K}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{13}$$

となる。ここで、$K=me^2/(4\pi\varepsilon_0\ell^2)$、$\ell$ は角運動量で

$$\ell=\frac{mr^2\dot{\theta}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{14}$$

である。また、エネルギーは保存するので

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{15}$$

は定数である。これを用いると、

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=K\left(\frac{E}{mc^2}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}u\right) \tag{16}$$

となり、整理すると

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+\Xi^2u=K\frac{E}{mc^2}\quad\left(\Xi^2=1-\frac{e^2K}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\right) \tag{17}$$

となる。よって、解は

$$u=A\cos\Xi(\theta+\theta_0)+\frac{KE}{mc^2\Xi^2} \tag{18}$$

となる。もし、$\Xi=1$(非相対論的な場合で、$c\to\infty$) では、θ について周期が 2π となるので軌道が閉じるが、$\Xi\neq 1$ の場合には、楕円の軸が回転する運動になる。

5. 略

6.

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}F^{\nu\mu}F^{\alpha\beta}=-2\left(\frac{\mathbf{E}^2}{c^2}-\mathbf{B}^2\right) \tag{19}$$

7.

$$\phi'=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{s},\quad A'_x=-\frac{e\mu_0 v}{4\pi}\frac{1}{s} \tag{20}$$

と書ける。ここで、$s=\sqrt{\gamma^2(x'+vt')^2+y'^2+z'^2}/\gamma$、$\gamma=1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ である。電磁場は

$$\mathbf{E}'=-\operatorname{grad}\phi'-\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t'},\quad \mathbf{B}'=\operatorname{rot}\mathbf{A}' \tag{21}$$

で計算する。