

【特殊相対性理論】

1 運動する系から見た電磁気学

物理学では、慣性系という特殊な系を考える。そして、この慣性系に対して等速度運動する系はすべて慣性系である。さらに、慣性系同士は対等で、そこに起きる物理現象には差がないと考えられている。したがって、電磁現象もすべての慣性系で同じようになるべきである。すなわち、法則を記述する方程式が慣性系の変換で不変に保たれないといけないのである。今、ある系で、電荷 Q が静止していたとすると、この系では静電場だけが存在し

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (1)$$

というスカラーポテンシャルで場が表される。しかし、この電荷に対して一定速度で運動する系では、電流が流れて見えるので磁場が存在するはずである。すなわち、運動する系ではスカラーポテンシャル以外にベクトルポテンシャルも存在しなければならないのである。また、磁場しか存在しない系で、ある荷電粒子がある速度で運動しているとローレンツ力を受ける。しかし、その粒子が静止して見える系ではローレンツ力は働かないはずであるが、実際には何かの力を受けて運動状態が変化する。したがって、この系では磁場以外に電場も存在しているはずである。このように、ある系での電場と磁場は、その系に対して運動する系から見た場合、お互いに入り交じる。そのため、これらは独立なものではないと推定される。もし、電磁現象がすべての慣性系で同等ならば、これらの現象について、ある慣性系で解いた結果を別の慣性系から見た時の結果はマックスウェル方程式をそれぞれの慣性系で解いた場合に一致すべきである。このような問題を考えると相対性理論が必要となる。

2 ニュートン力学とガリレイの相対性原理

ニュートン力学では、慣性系 $\{x\}$ において、ニュートンの運動方程式

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (2)$$

が成立する。そして、その慣性系に対して、速度 \mathbf{V} で移動している系 $\{x'\}$ でも同じ運動方程式が成り立つ。すなわち

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{V}t \quad (3)$$

$$t' = t \quad (4)$$

で表される変換で運動方程式は不変である。このような慣性系の同等性をガリレイの相対性原理といい、この変換をガリレイ変換という。

3 マックスウェル方程式とガリレイ変換

マックスウェル方程式は、ポテンシャルの満たすべき4つの波動方程式とゲージ条件

$$\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5)$$

$$\mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{i} \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \mu \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

に帰着される。また電荷の保存則

$$\operatorname{div} \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

を満たす必要がある。これら方程式がガリレイ変換に対してどうなるかを考えてみよう。まず、一番簡単な一次元 (x 方向) の伝播を考える。この時、波動方程式は

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (9)$$

となり、この一般解は

$$\psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (10)$$

である。ここで、 f 、 g は任意関数で、 $x - ct$ を引数にもつ関数は正の方向へ、 $x + ct$ を引数に持つ関数は負の方向へ伝播する波を表す。ここで、 x 方向へ V で運動する慣性系にガリレイ変換をすると

$$\psi(x', t') = f(x' - (c - V)t') + g(x' + (c + V)t') \quad (11)$$

となり、正と負の伝播の方向で伝播速度が変化する。すなわち、波動方程式はガリレイ変換に対して不変ではない。この意味するところはマックスウェルの方程式はガリレイ変換に対して不変ではないということであり、特定の座標系だけで成り立つことを意味している（もし、ニュートン力学とガリレイ変換に対する不変性が正しいならば）。通常、波動は媒質の運動である。そこで、電磁波を伝える媒質をエーテルと呼び、このエーテルに対して静止している系だけで、マックスウェルの方程式が成り立つと考えられていた。しかし、マイケルソン・モーレーの実験に代表されるような実験の結果は、エーテルの存在を否定するものだった（補遺 A）。

4 特殊相対性理論

アインシュタインは、以下のような公理をもとに、特殊相対性理論を構築した¹。

1. 相対性原理（全ての慣性系は同等である）
2. 光速不変の原理（光の速度は光源や観測者の運動とは無関係に決まる）

これは、まさに全ての慣性系でマックスウェルの方程式が成立することを要求する。また、もし、これが正しいのならば、マイケルソン・モーレーの実験の結果は全く自然に説明できる。しかし、ニュートン力学の仮定は修正をされなければならない。

4.1 ローレンツ変換

ガリレイ変換に代わるマックスウェルの方程式を不変にするような座標変換を探すことにしよう。変換は線形変換を考える。すなわち、

$$x' = p(x - Vt) \quad (12)$$

$$t' = qt + rx/c \quad (13)$$

¹ 数学的な理論の構築は、ローレンツ、ポアンカレらによって既に作り上げられていた。

と仮定する。ここで、 c は光速である。 p, q, r が求めるべき係数で、無次元になるように決めた。さらに、最初の式は $x = Vt$ を入れると常に $x' = 0$ になるように係数の比を決めてある。すると、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = p \frac{\partial}{\partial x'} + (r/c) \frac{\partial}{\partial t'} \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = -pV \frac{\partial}{\partial x'} + q \frac{\partial}{\partial t'} \quad (15)$$

なので、

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\frac{q^2 - r^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + p^2 [1 - (V/c)^2] \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + (p/c)(r + Vq/c) \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'} \quad (16)$$

だから、

$$q^2 - r^2 = 1, \quad p^2 [1 - (V/c)^2] = 1, \quad (p/c)(r + Vq/c) = 0 \quad (17)$$

である。これを満たすように係数を決めると

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad (18)$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \quad (19)$$

$$y' = y \quad (20)$$

$$z' = z \quad (21)$$

$$\beta = \frac{V}{c} \quad (22)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (23)$$

という変換になる。ここで、 $V \rightarrow 0$ の時はガリレイ変換に一致するように符号を決めた。この変換をローレンツ変換という。この変換を行うと、

$$= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \quad (24)$$

が成り立ち、波動の伝播速度は常に不変であることが分かる。ガリレイ変換と大きく異なる点は、運動する系の時間の流れや空間の長さが、運動する系の速度に依存していることである。特に、時間の概念はニュートン・ガリレイの考え方ではどの慣性系でも常に同じである（絶対時間）というものであったが、ローレンツ変換では時間と空間は一つの入れ物として不可分な存在となったことである。また、光速は普遍的な値を持つことが分かる。現在の国際単位系では長さの単位「メートル」は光速と時間の単位「秒」を用いて定義されている。

5 ドップラー効果と光行差

いま、ある慣性系で

$$g(x, t) = a \cos \omega(t - x/c) \quad (25)$$

で表される x 方向に進む単色平面波を考える。これを x 方向に V で進む系から見るとし、 $(x, t) \rightarrow (x', t')$ のローレンツ変換をする。この時 $x = \gamma(x' + \beta ct')$ で、 $t = \gamma(t' + \beta x'/c)$ だから、式 (25) は

$$g(x', t') = a \cos \omega[\gamma(1 - \beta)(t' - x'/c)] \quad (26)$$

となる。これを見ると、振動数が

$$\omega' = \omega \gamma(1 - \beta) = \omega \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (27)$$

に変化しているが分かる。これは、ドップラー効果によるものであるが、古典的な波動のドップラー効果の式

$$\omega'_{\text{classic}} = \omega(1 - \beta) \quad (28)$$

とは異なる式を与える。もちろん、 $\beta \ll 1$ の場合には両者は一致するが、生じた違いは運動系に移ると時間の刻みが変わる効果によるものである。この効果は、波の進む向きと運動方向が直交しているときに顕著になる。今度は

$$f(z, t) = a \cos \omega(t - z/c) \quad (29)$$

で表される z 方向に進む単色平面波を考える。これを x 方向に V で進む系から見るとすると式 (29) は

$$f(x', z', t') = a \cos \omega[\gamma(t' + \beta x'/c) - z'/c] \quad (30)$$

となる。これを見ると、

1. 振動数が $\omega' = \omega\gamma$ に変化している。
2. 本来は z 方向に進む波が、僅かに x 方向に傾いている。

ということが分かる。これは相対論を考慮して初めて表れるもので、最初の効果は横ドップラー効果²、後の効果は光行差と呼ばれている。前者は、高速のビームを使った分光や時間標準などで考慮されるべきものである。後者は、光速の推定に用いられた現象で、光線の傾きは

$$\tan \alpha = \gamma\beta \sim \beta \quad (31)$$

となる³。

6 ミンコフスキー空間

ローレンツ変換は

$$s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -(ct')^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad (32)$$

を満たす。そこで、3次元空間の回転でベクトルの長さが保存されるように、 s^2 を時間と空間をあわせた4次元時空間の「長さ」とすれば、ローレンツ変換は「回転」のような変換と考えることができる。もちろん純粋な回転ではなく、例えば、 $t-x$ 平面での「回転」は

$$x' = \cosh \theta x - \sinh \theta (ct) \quad (33)$$

$$ct' = \cosh \theta (ct) - \sinh \theta x \quad (34)$$

と、三角関数の代わりに双曲線関数を用いた変換で書き表される。ここで、 θ は

$$\tanh \theta = \beta \quad (35)$$

を満たす「回転角」である。また、このような4次元空間をミンコフスキー空間という。この座標を $x^0 = ct$ 、 $x^1 = x$ 、 $x^2 = y$ 、 $x^3 = z$ とし、ギリシャ文字の添字は 0,1,2,3 を表すとしよう。一般のローレンツ変換は、空間座標の回転変換と式 (18)-(23) で表されるような時間-空間座標を含む狭い意味でのローレンツ変換 (Boosts 変換とも呼ばれる) の組み合わせで表される。この変換係数を

$$x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (36)$$

²古典的な波では運動方向と波の伝播方向が直交している時にはドップラー効果は表れない。

³イギリスのブラッドレーは、1727年に光行差による角度のずれ、約20秒を観測し、これと地球の公転による速度 $V = 30\text{km/s}$ から $c = 3.01 \times 10^8\text{m/s}$ という値を求めた。

と書く⁴ここで、

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

で表されるミンコフスキー空間の計量テンソルを用いると⁵、式 (32) は

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta'_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \quad (38)$$

と書き表すことができるが、これが成立するためには

$$\eta_{\mu\nu} = \eta'_{\lambda\sigma} L^\lambda{}_\mu L^\sigma{}_\nu \quad (39)$$

となる必要がある。すなわち、ローレンツ変換は計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ を不変にする変換である。一般に、4 つの量、 (A^0, A^1, A^2, A^3) がローレンツ変換で

$$A'^\mu = L^\mu{}_\nu A^\nu \quad (40)$$

のように変換される場合、ミンコフスキー空間での反変ベクトルという。座標はその例である。また、偏微分の変換を考えると

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = L^\mu{}_\nu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \quad (41)$$

となり、反変ベクトルの変換とは左右が入れ替わっていることが分かる。このような変換をうけるものを共変ベクトルという。そして、上付き添字のベクトルの成分は反変ベクトルの成分、下付き添字は共変ベクトルを表すことにする。また、計量テンソルを用いて

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu \quad (42)$$

と、反変ベクトルと共変ベクトルの成分を変換できる。さらに、

$$T'^{\mu\nu} = L^\nu{}_\lambda L^\mu{}_\sigma T^{\lambda\sigma} \quad (43)$$

のように変換されるものは、2 階の反変テンソルと呼ばれる。更に上付きと下付きの添字の混ざった混合テンソルや添字の多い高階のテンソルを考えることもできる。また、全ての成分が 0 の零テンソルは、どんな座標系をでも常に 0 であることが分かる。そして、テンソル同士の関係式は常に

$$X_{\mu\nu\lambda\dots} - Y_{\mu\nu\lambda\dots} = 0 = X'_{\mu\nu\lambda\dots} - Y'_{\mu\nu\lambda\dots} \quad (44)$$

と書けるので、どんな座標系で見ても常に成り立つ。物理学の関係式は座標系に依らないはずである。従って、全ての方程式はテンソル方程式で表されなければならない。

⁴一つの項の中で同じ添字が上付きと下付きに表れたら、0 から 3 までの和をとるという意味である。すなわち、式 (36) は

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 L^\mu{}_\nu x^\nu$$

を意味している。このように和を取ることをテンソルの縮約といい、和の記号を省略する事をアインシュタインの記法という。

⁵教科書によっては、 $\eta_{00} = 1$ 、 $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$ となっているものもある (例えば、文献 [3])。

6.1 時間的ベクトルと空間的ベクトル

今、2つの時空点 $X_A : (ct_A, \mathbf{r}_A)$ と $X_B : (ct_B, \mathbf{r}_B)$ の間の「距離」を

$$\Delta s^2 = -(ct_A - ct_B)^2 + (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)^2 \quad (45)$$

で定義する。この「距離」は座標系に依らない。普通のユークリッド空間では、ベクトルの長さは常に正であるが、ミンコフスキー空間では、零になったり負になったりする。そこで、4元ベクトル X^μ の「長さ」をそれ自身の内積、つまり

$$X^\mu X_\mu = -(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 \quad (46)$$

で定義し、

1. $X^\mu X_\mu < 0$: 時間的 (time-like) ベクトル
2. $X^\mu X_\mu = 0$: ヌル (null) ベクトル
3. $X^\mu X_\mu > 0$: 空間的 (space-like) ベクトル

と呼ぶ⁶。もし、2つの時空点の変位ベクトルが時間的ならば、この2つの時間的な順序（過去と未来）は座標系には依らないが、空間的な場合は座標変換を行うと時間順序が入れ替わることもある。

6.2 固有時間と4元速度ベクトル

今、ある粒子が速度 \mathbf{v} で無限小離れた2つの点を通じたとする。このとき、

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -(cdt)^2[1 - (v/c)^2] < 0 \quad (v^2 = \mathbf{v}^2) \quad (47)$$

である。そこで、粒子の固有時間 τ を

$$d\tau = dt\sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (48)$$

で定義すると、これは座標の取り方に依らない量である。もし、その粒子が静止していれば、固有時間は時間座標と一致する。従って、その粒子が持っている時計の刻みを与えられ考えられる。もし、粒子が非常に早い速度で運動しているとすると、固有時間の刻みは座標時間（観測者の時計）に比べてゆっくり進む。このような現象は、素粒子の崩壊寿命の測定などで確認されている。この固有時間を用いて、4元速度ベクトル u^μ を

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) \quad (49)$$

で定義する。固有時間の定義から明らかに、 $u_\mu u^\mu = -c^2 < 0$ で、常に時間的である。4元速度ベクトルは、ミンコフスキー空間での粒子の運動の軌跡を表す曲線の接ベクトルである。一般的にミンコフスキー空間の曲線の任意の点での接ベクトルが時間的な場合、その曲線を時間的曲線という。粒子の軌跡は必ず時間的である必要がある。もし、空間的な点があるとすると、その点の近傍での粒子の運動が、ある座標系では未来から過去に進むことになる。これは因果律に反する。このような要請から、粒子の速度は常に光速以下でなければならないことが分かる。

⁶計量テンソルの符号が (1,-1,-1,-1) の場合は正負が逆になる。すなわち、 $X^\mu X_\mu > 0$ の時、時間的ベクトルと呼ばれる。

7 相対論的なマックスウェル方程式の定式化

そもそも、特殊相対性理論はマックスウェル方程式の不変性を保つように考えられたものであるので、相対論的な定式化は非常に易しい。つまり、 $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$ 、 $i^\mu = (c\rho, \mathbf{i})$ をミンコフスキー空間の反変ベクトル、 \mathbf{E} や \mathbf{B} はテンソルの成分として扱うことで定式化できる。まず、

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (50)$$

で表せる電磁場テンソルを考える。これを用いると、マックスウェル方程式の

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho, \quad \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (51)$$

は

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 i^\mu \quad (52)$$

と書き下せる。また、

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (53)$$

の方程式は

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (54)$$

と書き表すことができ、

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \quad (55)$$

とすれば満たされることが分かる。ここで、 $A_\mu = (-\phi/c, \mathbf{A})$ は 4 元ポテンシャルの共変成分である。そして、ポテンシャルに対するゲージ変換は

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial \chi}{\partial x^\mu} \quad (56)$$

という形をしていることが分かる。電磁場が式 (55) で表されていることを考えると、ゲージ変換による不変性は明白である。これらは、3 次元空間での rot 演算や grad 演算を 4 次元空間に拡張したものである。さらに、ダランベールの演算子は

$$= \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (57)$$

となり、式 (5)、(6) はダランベール演算子が不変であることを考えると常に成り立つ。また、電荷の保存則やローレンツゲージの条件は

$$\frac{\partial i^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (58)$$

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (59)$$

のように 4 次元での発散の形になる。このように非常に綺麗な形で、マックスウェルの方程式を相対論的な形式に書き直すことができる。この定式化では、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルが一つの 4 元ポテンシャルを構成するとか、電場と磁場が一つの電磁場テンソルの成分をなすという仮定を行っている。この仮定が正しいかどうかは、実験事実で判断しなければならない。そして、現在まで、相対論に反するような実験結果は得られていない。

8 電磁場のローレンツ変換

簡単な場合で、ローレンツ変換を考えてみよう。運動系は一定速度 V で x 方向に運動しているとする。すると、ローレンツ変換の変換行列 $L^\mu{}_\nu$ は

$$L^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\beta = V/c, \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}) \quad (60)$$

である。この変換で電磁場テンソルは

$$F'^{\mu\nu} = L^\mu{}_\lambda L^\nu{}_\rho F^{\lambda\rho} \quad (61)$$

のように変換される。そこで、各成分を計算してみる。

$$F'^{10} = L^1{}_\lambda L^0{}_\rho F^{\lambda\rho} \quad (62)$$

であるが、0 でない成分だけを拾うと

$$F'^{10} = L^1{}_0 L^0{}_1 F^{01} + L^1{}_1 L^0{}_0 F^{10} = (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) F^{10} = F^{10} \quad (63)$$

である。ところで、 $F^{10} = -E_x/c$ だから、

$$E'_x = E_x \quad (64)$$

をという関係を表す。次は

$$F'^{20} = L^2{}_\lambda L^0{}_\rho F^{\lambda\rho} \quad (65)$$

を計算しよう。やはり、0 でない成分だけを拾うと

$$F'^{20} = L^2{}_2 L^0{}_0 F^{20} + L^2{}_1 L^0{}_1 F^{21} = -\gamma(E_y/c - \beta B_z) \quad (66)$$

である。よって

$$E'_y = \gamma(E_y - V B_z) \quad (67)$$

である。次は

$$F'^{30} = L^3{}_\lambda L^0{}_\rho F^{\lambda\rho} = L^3{}_3 L^0{}_0 F^{30} + L^3{}_1 L^0{}_1 F^{31} = -\gamma(E_z/c + \beta B_y) \quad (68)$$

だから、

$$E'_z = \gamma(E_z + V B_y) \quad (69)$$

となる。これで、運動系での電場の計算ができる。磁場に関しては、

$$B'_x = F'^{23} = L^2{}_\lambda L^3{}_\rho F^{\lambda\rho} = B_x \quad (70)$$

$$B'_y = F'^{31} = L^3{}_\lambda L^1{}_\rho F^{\lambda\rho} = \gamma(B_y + V E_z/c^2) \quad (71)$$

$$B'_z = F'^{12} = L^1{}_\lambda L^2{}_\rho F^{\lambda\rho} = \gamma(B_z - V E_y/c^2) \quad (72)$$

という計算を行えばよい。これによって確かに、運動する系では電場と磁場が入り交じることが分かる。

9 電磁場のエネルギー・運動量テンソル

マクスウェル方程式を用いると電磁場のエネルギー密度

$$u = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2) \quad (73)$$

とポインティングベクトル

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (74)$$

は、真空中で

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0 \quad (75)$$

を満たす。また、運動量密度ベクトル $\mathbf{G} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \mathbf{S}/c^2$ とマクスウェルの応力テンソル⁷

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_0 E_i E_j + \mu_0 H_i H_j - \delta_{ij} u \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (76)$$

は

$$\frac{\partial G_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} \quad (77)$$

という関係式を満たす⁸。そこで、電磁場のエネルギー・運動量テンソルを

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} u & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y/c & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ S_z/c & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (78)$$

とすると

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (79)$$

という式に書くことができる。また、この $T^{\mu\nu}$ は

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(\eta_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \quad (80)$$

というテンソル形式に書くことができる。

9.1 4次元の発散と保存則

電荷の保存則の微分形式による表現は式(8)のように表れるが、それをミンコフスキー空間のベクトルの発散が0という式(58)で表すことができた。また、電磁場のエネルギーの保存則を示す式(75)や、運動量の保存則の式(77)は、やはり式(79)という一つの形式に表すことができた。これらは、ある領域で積分を行うと内部の総量の時間的な変化率がそれを取り囲む空間の境界から外に向かって出ていく流束の面積分に等しいという形に変形できる。もし、孤立した系ならば、十分遠方では流束は0になると考えられるのでその内部の量は保存量となる。また、物質と電磁場が相互作用しているような場合は、それぞれのエネルギーや運動量は保存しないが、2つの和はやはり保存しなくてはならない。従って、電磁場と物質の両方のエネルギー・運動量テンソルを加えたものの4次元発散が0となるのである。

⁷この符号も教科書によって異なる。

⁸ラテン文字の添字は空間成分のみを示すことにする。

10 相対論的力学

物理学の法則がローレンツ変換に対して不変になるべきだとすると、ニュートンの運動方程式もそれを満たすように変更すべきである。最も一般的なニュートンの運動方程式は運動量を \mathbf{p} とするとき、

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (81)$$

となる。今、4次元運動量 $p^\mu = mu^\mu$ と定義すると空間成分に関しては

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}/c)^2}} \quad (82)$$

と書けるので、これが式 (81) での運動量の定義とすれば

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}/c)^2}} = \mathbf{F} \quad (83)$$

という形でそのまま運動方程式として成り立つと考える。時間微分を固有時間の微分にすれば

$$\frac{dp^j}{d\tau} = \frac{F^j}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (84)$$

である。また、

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = c \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (85)$$

となる。そこで、4次元力 K^μ を

$$K^\mu = \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) \quad (86)$$

と定義すると

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu \quad (87)$$

という相対論的に不変な運動方程式を得る。また、この K^μ は4元速度ベクトル u^μ と「直交」する。すなわち

$$u_\mu K^\mu = u_\mu \frac{dp^\mu}{d\tau} = mu_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{m}{2} \frac{d(u_\mu u^\mu)}{d\tau} = \frac{m}{2} \frac{d(-c^2)}{d\tau} = 0 \quad (88)$$

である。ところで、この時間成分の運動方程式は粒子がうける単位時間当たりの仕事を表している。すなわち、4次元運動量の時間成分は粒子のエネルギー E を表している。つまり、

$$p^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) = (E/c, \mathbf{p}) \quad (89)$$

と書くこともできる。この式から

$$E^2 = (mc^2)^2 + (c\mathbf{p})^2 \quad (90)$$

という公式が得られる。従って、 $\mathbf{p} = 0$ でも粒子は $E = mc^2$ のエネルギー（静止エネルギーと呼ばれる）を持つ。また、光は $m = 0$ なので $E = c|\mathbf{p}|$ が成り立つ。

11 相対論的な荷電粒子の運動

10節のような定式化は、ラグランジュ関数を用いても可能である。これにより、荷電粒子の運動を考えてみよう。ニュートン力学では、荷電粒子の運動は

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - q(\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \quad (91)$$

のラグランジュ関数を用いて運動方程式を作れば良かったが、これはやはり相対論的に不変な形ではない。今、 (cdt, dx, dy, dz) が反変ベクトルとなるので、

$$Ldt = -mc\sqrt{(cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} - q(\phi dt - A_x dx - A_y dy - A_z dz) = -mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} + qA_\mu dx^\mu \quad (92)$$

は相対論的に不変な量になる。従って、これから計算される作用積分の値も不変となる。だから、

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2} - q(\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \quad (93)$$

をラグランジュ関数とすればよいと考える。もし、 $v/c \ll 1$ ならば式 (93) は式 (91) に帰着する（定数を除いて）。この L を使って、ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^k} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^k} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (94)$$

を作ると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}/c)^2}} \right) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (95)$$

が得られる。これは、式 (83) の右辺に良く知られたローレンツ力の式を代入ものとなっている。更に、4次元運動量を用いた定式化を行うと

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = q\eta^{\mu\nu} F_{\nu\lambda} u^\lambda \quad (96)$$

と書き表すこともできる。これは、作用積分を

$$\int Ld\tau = \int [-mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu} + qA_\mu u^\mu] d\tau \quad (97)$$

で与え、 u^μ を独立としてラグランジュの方程式を計算し、最後に $-\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = c^2$ を代入すると得られる。また、正準形式を作ることもできる。正準運動量 \mathbf{p}_c は

$$p_c^i = \frac{\partial L}{\partial v^i} = \frac{mv^i}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + qA^i \quad (98)$$

と力学的な運動量と電磁場との相互作用による成分の和になる。これは、ニュートン力学と同じである。また、ハミルトン関数を作ると

$$H = \sum_{i=1}^3 v^i p_c^i - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + q\phi = c\sqrt{(mc)^2 + (\mathbf{p}_c - q\mathbf{A})^2} + q\phi \quad (99)$$

となる。ハミルトン関数は粒子の全エネルギーを表す。電磁場がない時には

$$E = c\sqrt{(mc)^2 + \mathbf{p}^2} \quad (100)$$

となるので、式 (90) と一致する。

11.1 一様電場の場合

一様な電場中の荷電粒子の運動を考えてみる。今、 $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ 、 $\mathbf{B} = 0$ とする。また、 $t=0$ では静止していたとしよう。その場合、運動は x 方向のみに起こる。そのときは、積分は簡単に行える。

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = qEt \quad (101)$$

これを v について解き直すと

$$\frac{dx}{dt} = c \frac{(qEt/mc)}{\sqrt{1 + (qEt/mc)^2}} \quad (102)$$

となる。この積分は実行できて

$$x = \frac{mc^2}{qE} \sqrt{1 + (qEt/mc)^2} + \text{const} \quad (103)$$

となる。式 (102) を見ると、荷電粒子の速度は c を越えないことが分かり、式 (103) を見ると、 $qEt/mc \ll 1$ なら、 t の 2 次関数で変化し、ニュートン力学の結果と一致するが、 $qEt/mc \gg 1$ の時は t の 1 次関数となる。

11.2 一様な磁場中

次は $\mathbf{E} = 0$ 、 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ の場合を考えてみる。まず、 $\mathbf{E} = 0$ の場合、 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$ であり、4次元運動量の時間成分は一定、すなわち、 v^2 は一定値になる。従って、式 (95) を書き下すと

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})}{m} \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (104)$$

となる。成分に分けて書けば、

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0 \quad (105)$$

となる。また、

$$\omega = \frac{qB}{m} \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (106)$$

である。この解は $v_z = 0$ として、平面運動を考えると

$$x = x_0 + r \sin(\omega t + \alpha) \quad (107)$$

$$y = y_0 + r \cos(\omega t + \alpha) \quad (108)$$

$$(109)$$

と円運動を表す。ここで、

$$r = \frac{v}{\omega} = \frac{mv}{qB \sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (110)$$

である。ニュートン力学で解を求めた場合は、回転の角周波数は

$$\omega_c = \frac{qB}{m} \quad (111)$$

で、粒子の速さには依存しなかったが、相対論的な効果を考えると回転周期が粒子の速さ、つまり、エネルギーの関数になる。この関係は、粒子加速器を考える場合の非常に基本的なものである。

補遺

A マイケルソン・モーレーの実験

エーテルに対する地球の運動を測定する試みが、有名なマイケルソン・モーレーの実験である [5]。これは、マイケルソン干渉計を用いて行われた (図 1)。光源 S から出た光は、ビームスプリッター B で直交

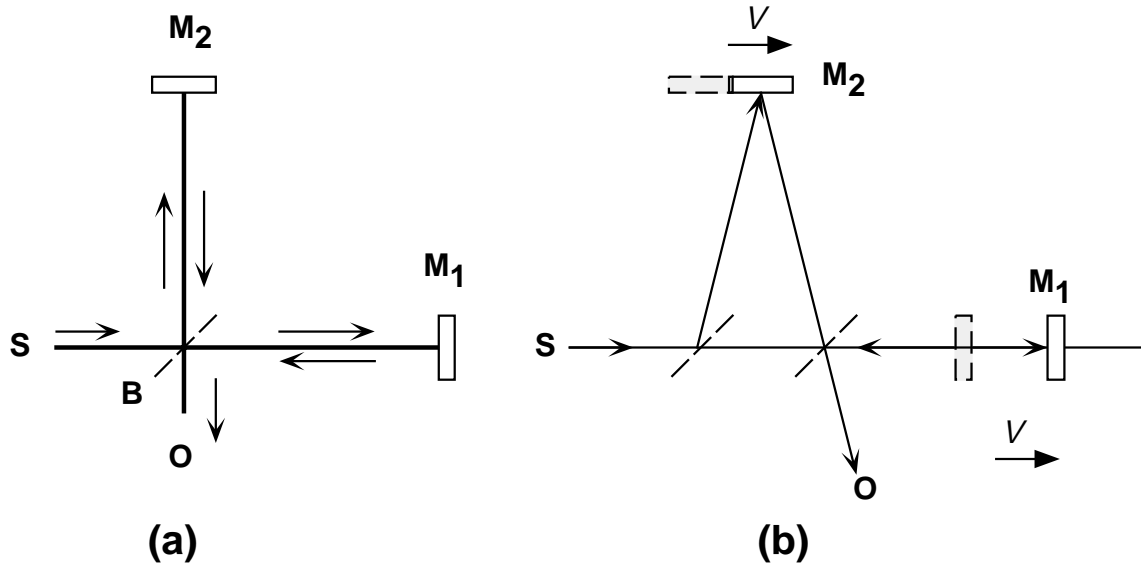


図 1: マイケルソン干渉計 (a) とエーテル中を運動するマイケルソン干渉計 (b)

する光路に分けられ、それぞれの鏡 M_1 、 M_2 で反射されてもとに戻り、再び、ビームスプリッターで重ね合わされて、干渉する。図中の O のところで光の明暗を見ると、

$$I = \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2} + \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (112)$$

となる。ここで、 ϕ_i ($i = 1, 2$) は、それぞれの光路を往復してきた光の位相で、光源が振動数 ν の単色光を放出しているとする

$$\phi_1 - \phi_2 = 2\pi\nu(t_1 - t_2) \quad (113)$$

となる。ここで、 t_i ($i = 1, 2$) はそれぞれの光路を光が往復する為に必要な時間である。いま、干渉計がエーテルに対して速度 V で、1 の方向に進んでいるとする。すると、

$$t_1 = \frac{L}{c - V} + \frac{L}{c + V} = \frac{2cL}{c^2 - V^2} \quad (114)$$

$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}} \quad (115)$$

となる (図 1(b))。ここから、

$$\Delta\phi = 2\pi\nu(t_1 - t_2) \sim \frac{2\pi\nu L}{c} \left(\frac{V}{c}\right)^2 = \frac{2\pi L}{\lambda} \left(\frac{V}{c}\right)^2 \quad (116)$$

となる。この位相差を読みとれば、エーテルに対する干渉計 (つまり地球) の運動が検出できる。実際には、干渉計の腕の長さには差があるので、干渉計を 90 度回転させて、干渉縞の変化を読む。マイケルソンは、最初、ポツダムで実験を開始し、パリに移り、最後にクリーブランドで、モーレーと共に測定を行っ

た。光源にはランプを用い、測定は縞の移動を望遠鏡で覗くという形で行われ、結果として、干渉縞の移動量は1波長の1/100以下であるという結論が出た。もし、地球の公転速度(30km/s)を V と思うと、0.4波長程度の縞の移動が期待されていたので、エーテルに対する運動は観測されなかったと考えて良い。この実験結果を解釈する為、いろいろな仮設が提案された。有名なものはローレンツ収縮の仮説であるが、これは進行方向には、全ての物体の長さが $\sqrt{1-(V/c)^2}$ だけ縮むというものである⁹。マイケルソン・モーレーが行った実験は、レーザーと光電変換できる装置を用いれば飛躍的に感度が向上するのは容易に想像できる。レーザーを用いた最初の実験は、ジャバンとタウンズが1963年に行った。直交して置いた2台のHe-Neレーザーから出る光のビートの周波数をはかるものであった。この装置は天井からゴムバンドで吊るされて、振動を避けると共に、約10秒で90度の回転振動を行う仕掛けになっている。これにより、レーザーが設置される方向で、ビート周波数が変化するかをみれば光速度の方向依存性、すなわちエーテルに対する運動の影響を調べることができる。結果は、マイケルソン・モーレーの結果の25分の1で大きさまで精度を高めることができた。しかし、レーザー発振器そのものを回転させると、磁場などの影響を受けて発振周波数が僅かに変化するので、さほどの改善は見られなかった。更に、これに安定化の技術を取り入れた実験が1978年にブリエとホールによって行われた。これはメタン安定化レーザーと回転する光共振器に同期させたHe-Neレーザーのビートをはかる実験で、光共振器の方向によりビート周波数が変化するかどうかを測定した。この結果では、ジャバンたちの結果よりも更に4000倍も高い精度で実験が行われ、エーテルの効果は観測されなかった。

B 反変ベクトルと共変ベクトル

あるベクトル \mathbf{A} はその空間の基底ベクトル \mathbf{e}_μ と成分 A^μ を用いて

$$\mathbf{A} = A^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (117)$$

と表すことができる¹⁰。しかし、基底の取り方は人為的なものであるから、物理的な対象は基底の取り方に依存しないはずである。そこで、基底に対して

$$\mathbf{e}_\mu = L^\nu{}_\mu \mathbf{e}'_\nu \quad (118)$$

という変換を行う。すると

$$\mathbf{A} = A^\mu \mathbf{e}_\mu = A^\mu L^\nu{}_\mu \mathbf{e}'_\nu = A'^\nu \mathbf{e}'_\nu \quad (119)$$

となれば、ベクトル自身は不変に保たれる。したがって、成分は

$$A'^\nu = L^\nu{}_\mu A^\mu \quad (120)$$

と変換される。式(118)と式(120)を見ると変換のされ方が反対になっている。このため反変ベクトルと呼ばれる。さらにベクトルを引数に持つ線形汎関数、すなわち

$$f(\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) = \alpha f(\mathbf{A}) + \beta f(\mathbf{B}) \quad (121)$$

を満たす関数の集合を考える。そして、

$$(f + g)(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A}) + g(\mathbf{A}) \quad (122)$$

$$(\lambda f)(\mathbf{A}) = \lambda f(\mathbf{A}) \quad (123)$$

⁹ローレンツとほぼ同時期(少し前)に、フィッツジェラルドが提唱しているので、フィッツジェラルド収縮とも呼ばれる。

¹⁰本節では、一般的な次元を考え、縮約は考えている空間の次元全部に対して行うことにする。

によって、和とスカラー倍を定義すると、関数自身の集合がベクトル空間になる。このベクトル空間を双対空間という。またこの空間の要素を双対ベクトルという。そして、このベクトルの基底を ω^μ とすれば、

$$f = f_\mu \omega^\mu \quad (124)$$

と書くことができる。そして、ベクトル \mathbf{A} と双対ベクトル f の内積を

$$(f, \mathbf{A}) = f(\mathbf{A}) = f_\mu A^\nu \omega^\mu(e_\nu) \quad (125)$$

で定義する。そして、 $\omega^\mu(e_\nu) = \delta_\nu^\mu$ となるように基底を選ぶ。このような基底を双対基底という。この双対基底を使うことにすれば、

$$(f, \mathbf{A}) = f_\mu A^\mu \quad (126)$$

と書くことができる。そして、ベクトル空間の基底の変換に対して、

$$\omega'^\mu = L^\mu_\nu \omega^\nu \quad (127)$$

という双対基底の変換を行えば、 $\omega'^\mu(e'_\nu) = \delta_\nu^\mu$ が成り立つ。このとき、双対ベクトルの成分の変換は

$$f_\mu = L^\nu_\mu f'_\nu \quad (128)$$

と変換される。これは、ベクトル空間の基底の変換と同じように変換されているので共変ベクトルと呼ばれる。本来、内積は共変ベクトルと反変ベクトルの間に定義されているが、反変ベクトルを共変ベクトルの空間に移す写像を定義すれば、ベクトルの同士の内積を定義できる。この写像を計量という。これは一次の写像になり、計量テンソルと呼ばれるテンソルで表現できる。そして、この計量テンソル g は

$$\mathbf{g} = g_{\mu\nu} \omega^\mu \otimes \omega^\nu \quad (129)$$

と書ける。ここで、 $\omega^\mu \otimes \omega^\nu$ は直積を表す。また、 $g_{\mu\nu}$ は計量テンソルの成分である。そして、計量による写像を

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{A} = g_{\mu\nu} A^\rho \omega^\mu \otimes \omega^\nu(e_\rho) = g_{\mu\nu} A^\nu \omega^\mu \quad (130)$$

で定義する。よって、ベクトルの共変成分は

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad (131)$$

である。そして、ベクトルの長さは

$$\|\mathbf{A}\|^2 = (\mathbf{g} \cdot \mathbf{A}, \mathbf{A}) = g_{\mu\nu} A^\nu A^\mu \quad (132)$$

で定義される。また、ベクトル同士の内積も

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \quad (133)$$

で計算できる。この計量を与えることで、ベクトル空間に長さや角度という概念を導入できる。ただし、普通のユークリッド空間では、この2つには差がないのであまり厳密に区別されていない。普通の数学では、ベクトルの長さは常に正になるように定義するが、相対論では負になりうる。このような計量を不定計量という。

参考文献

- [1] 平川浩正：「電気力学」(培風館、1973年)。
- [2] 平川浩正：「相対論(第2版)」(共立出版、1986年)。
- [3] ランダウ・リフシッツ：「場の古典論」(原書第6版)(東京図書、1978年)。
- [4] 佐藤文隆：「相対論と宇宙論」(サイエンス社、1981年)。
- [5] 霜田光一：「歴史を変えた物理実験」(丸善、1996年)。

問題

1. ある基準系に対して、 $\mathbf{V} = (V_x, V_y, 0)$ で運動する系に座標変換する場合のローレンツ変換の変換行列を求めよ。
2. ある基準系で、 $x = \pm L$ の2点から $t = 0$ で同時に光をだすと、 $t = L/c$ に、原点に到達する。この現象を x 方向に速度 v で運動する系から観察して現象を説明せよ。
3. 一様な電場中の運動を解く場合に、初期条件で $v_x = 0$ 、 $v_y = v_0$ というように、電場に垂直な初速度を与えた時の荷電粒子の運動を求めよ。
4. 水素原子の電子の運動を相対論的に解け。ただし、陽子は電子に比べて十分重いので、原点に静止しているとして良い。また、電磁波の放出などは考えなくて良い。
5. 式(50)と式(78)が、実際に式(55)と式(80)で与えられることを計算で示せ。
6. 電磁場テンソルの2次の量でスカラーになる量は $F_{\nu\mu}F^{\mu\nu}$ である。これを \mathbf{E} と \mathbf{B} で表せ。
7. 原点に静止している点電荷 q の作る電磁場を x 方向に速度 V で運動する系から観測するとどうなるかを、ポテンシャルのローレンツ変換を使って計算せよ。これと、第8節の計算結果が一致するかどうか確かめよ。