『電磁気学第２』参考資料

【球面調和関数と球ベッセル関数による展開】

1　球面調和関数による多重極展開

静電ポテンシャル

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{R})}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}\mathrm{d}^3\mathbf{R} \tag{1}$$

は $\mathbf{R}$ と $\mathbf{r}$ のなす角を χ とすると $|\mathbf{r}-\mathbf{R}|^2 = r^2 - 2Rr\cos\chi + R^2$ で、ルジャンドルの多項式 $P_n(x)$ を用いると

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\chi)\left(\frac{R}{r}\right)^n \quad (r > R) \tag{2}$$

となり、更に、$\mathbf{R}$ と $\mathbf{r}$ を球座標で (R,Θ,Φ) と (r,θ,φ) で表すと、$\cos\chi = \cos\theta\cos\Theta + \sin\theta\sin\Theta\cos(\varphi-\Phi)$ であるから、球面調和関数 ${Y_n}^m$ の加法公式、

$$P_n(\cos\chi) = \frac{4\pi}{2n+1}\sum_{m=-n}^{n} {Y_n}^m(\theta,\varphi){Y_n}^m(\Theta,\Phi)^* \tag{3}$$

を用いて、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{q_m^{(n)}}{r^{n+1}}\sqrt{\frac{4\pi}{2n+1}}{Y_n}^m(\theta,\varphi) \tag{4}$$

$$q_m^{(n)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2n+1}}\int \rho(R,\Theta,\Phi)R^n {Y_n}^{m*}(\Theta,\Phi)R^2\sin\Theta\mathrm{d}R\mathrm{d}\Theta\mathrm{d}\Phi \tag{5}$$

が得られる。この $q_m^{(n)}$ は、電気 2^n 重極モーメントを表す。そして、$n=0$ は全電荷、$n=1$ は双極子モーメント、$n=2$ は 4 重極モーメントになる。これらは、直交座標を用いて展開したときのモーメントに相当している。このような展開は、直交座標を用いるよりも系統的な計算ができる。また、ラプラスーポアッソン方程式を直接、球座標で、変数分離して解く場合には、必然的にこのような計算に帰着される。

2　ルジャンドル多項式と球面調和関数

n 次のルジャンドル多項式 $P_n(x)$ は、ロドリゲスの公式で

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \tag{6}$$

で与えられ、

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (|t| < 1) \tag{7}$$

のような母関数展開が可能である。そして、この多項式には、随伴関数があり、

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_n(x)}{\mathrm{d}x^m} \quad (|m| \le n) \tag{8}$$

があり、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P_n^m(x)}{\mathrm{d}x}\right] - \left[\frac{m^2}{1-x^2} - n(n+1)\right]P_n^m(x) = 0 \tag{9}$$

の解である ($m=0$ の場合、ルジャンドルの微分方程式となる)。$m<0$ の場合の定義は、式 (6) を用いれば意味が明白となるだろう [2]。また、

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_k^m(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nk} \tag{10}$$

という直交関係を持つ。ラプラス演算子は

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\ \ ) + \frac{1}{r^2}\Delta_\Omega \tag{11}$$

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\ \ \right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{12}$$

と書くことができるが、角度部分の演算子に対して、

$$\Delta_\Omega\, P_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} = -n(n+1)P_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{13}$$

が成り立つ。そこで、球面調和関数を

$$Y_n^m(\theta,\varphi) = (-1)^m\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}P_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{14}$$

と定義すると

$$\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\, Y_n^m(\theta,\varphi)Y_{n'}^{m'*}(\theta,\varphi) = \delta_{nn'}\delta_{mm'} \tag{15}$$

という正規直交関係を得ることができる。量子力学では、角運動量の 2 乗の演算子 $\hat{\boldsymbol{\ell}}^2$ と z 成分の演算子は

$$\hat{\boldsymbol{\ell}}^2 = -\hbar^2\Delta_\Omega \tag{16}$$

$$\hat{\ell}_z = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{17}$$

となるので、球面調和関数は、この 2 つの演算子の同時固有状態である。すなわち

$$\hat{\boldsymbol{\ell}}^2\, Y_l^m = \hbar^2 l(l+1)\, Y_l^m \tag{18}$$

$$\hat{\ell}_z\, Y_l^m = \hbar m\, Y_l^m \tag{19}$$

を満たす。

3　球ベッセル関数による展開

球座標でヘルムホルツ方程式を解く場合に

$$\psi(r,\theta,\varphi) = U(r)Y_l^m(\theta,\varphi) \tag{20}$$

とおくと、

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2(rU)}{\mathrm{d}r^2} + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right]U = 0 \tag{21}$$

という方程式が得られる。$x=kr$ とおけば、

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}^2(xU)}{\mathrm{d}x^2} + \left[1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right]U = 0 \tag{22}$$

となる。この解を球ベッセル関数という。球ベッセル関数には独立な解が 2 つあり、

$$
\begin{aligned}
j_n(x) &= (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \frac{\sin x}{x} && (23)\\
n_n(x) &= -(-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \frac{\cos x}{x} && (24)
\end{aligned}
$$

と表される。また、別の解もあり、これは球ハンケル関数と呼ばれ、

$$
\begin{aligned}
h_n^{(1)}(x) &= -\mathrm{i}(-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x} && (25)\\
h_n^{(2)}(x) &= \mathrm{i}(-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x} && (26)\\
& && (27)
\end{aligned}
$$

となる。こちらの方は、球面波が広がるか収束するかどちらか一方の波を表す。そして、ヘルベクトルに対する

$$
\mathbf{\Pi}_\omega(\mathbf{r},t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{4\pi\varepsilon_0}\int \tilde{\mathbf{P}}_\omega(\mathbf{R})\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}\mathrm{d}^3\mathbf{R} \tag{28}
$$

という式は、0 次の第 2 種球ハンケル関数の

$$
\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} = -\mathrm{i}k\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\chi)h_n^{(2)}(kr)j_n(kR) \ \ (r>R) \tag{29}
$$

という展開公式を用いると、

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Pi}_\omega(\mathbf{r},t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{\Pi}_\omega^{(n)}(\mathbf{r},t) && (30)\\
\mathbf{\Pi}_\omega^{(n)}(\mathbf{r},t) &= -\mathrm{i}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{4\pi\varepsilon_0}(2n+1)h_n^{(2)}(kr)\int j_n(kR)P_n(\cos\chi)\tilde{\mathbf{P}}_\omega(\mathbf{R})\mathrm{d}^3\mathbf{R} && (31)
\end{aligned}
$$

と書くことができる。$kR \ll 1$ として、

$$
j_n(kR) \sim \frac{2^n n!}{(2n+1)!}(kR)^n \tag{32}
$$

という近似式を使うと

$$
\mathbf{\Pi}_\omega^{(n)}(\mathbf{r},t) \approx -\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{4\pi\varepsilon_0}k^{n+1}h_n^{(2)}(kr)\frac{2^n n!}{(2n)!}\int R^n P_n(\cos\chi)\tilde{\mathbf{P}}_\omega(\mathbf{R})\mathrm{d}^3\mathbf{R} \tag{33}
$$

で表される。$n=0$ の場合は、$P_0(\cos\chi)=1$ かつ $h_0^{(2)}(x) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}/x$、$n=1$ では、$P_1(\cos\chi)=\cos\chi$ かつ $h_1^{(2)}(x) = \mathrm{i}(1+\mathrm{i}x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}/x^2$ なので、kr の冪級数展開と一致する。しかし、この次の項は一致しない。すなわち、式 (32) の近似が不十分となるためである。その時は、式 (31) に戻って計算しないといけない。

参考文献

[1] 平川浩正：「電気力学」（培風館、1973 年）.

[2] ジョージ・アルフケン著、権平健一郎、神原武志、小川直人訳：基礎物理数学 3 「特殊関数と積分方程式」（講談社、1978 年）.