

『電磁気学第2』講義資料 No.3

【電磁波の散乱】

電磁波と荷電粒子が相互作用すると、荷電粒子から入射電磁波とは異なる方向に電磁波が放射される。また、非一様な媒質に入射した場合にも、様々な方向に電磁波が放出される。このような現象を散乱という。散乱には、入射した電磁波と同じ周波数の電磁波として散乱される弾性散乱と異なる周波数の電磁波として散乱される非弾性散乱とに区別される。

1 散乱断面積

ある散乱体に電磁波が入射し、散乱波が発生したとする。この時、電場は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s \quad (1)$$

と表される。ここで、 \mathbf{E}_i と \mathbf{E}_s は入射波と散乱波の電場を表す。散乱波は散乱体から十分離れた点では球面波で表され、

$$|\mathbf{E}_s| \propto \frac{1}{r} \quad (2)$$

$$\mathbf{B}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{E}/c \quad (\mathbf{n} = \mathbf{r}/r) \quad (3)$$

を満たし、 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$ である。ここで、 \mathbf{r} は散乱体の中心を原点とした時の観測点の座標で、 $r = |\mathbf{r}|$ である。そして、散乱波のポインティングベクトルは、

$$\mathbf{S}_s = \frac{\mathbf{E}_s \times \mathbf{B}_s}{\mu_0} = \frac{|\mathbf{E}_s|^2}{\mu_0 c} \mathbf{n} \quad (4)$$

で与えられる。よって、半径 r の球面を考えて、ある立体角 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ 内に散乱される電磁波のエネルギーは単位時間当たり（平均をとると）

$$dW = \frac{|\overline{\mathbf{E}_s}|^2}{\mu_0 c} r^2 d\Omega \quad (5)$$

である。これを入射波の単位時間・単位面積あたりのエネルギー、すなわち、入射波のポインティングベクトルの（時間平均の）絶対値で割ったものを

$$dW/|\overline{\mathbf{S}_i}| = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (6)$$

と表す。この $d\sigma/d\Omega$ は、ある方向への単位立体角当たりの散乱波の相対的な強度を示す指標である。そして、面積の次元をもつので微分散乱断面積という。また、これを全立体角で積分したものを全断面積といい、

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (7)$$

で表す。この σ を使うと、散乱波の全エネルギー W は

$$W = \sigma |\overline{\mathbf{S}_i}| \quad (8)$$

であるから、あたかも断面積 σ の物体を入射波に当てて遮ったように見えるので、断面積という名前も理解できるだろう。しかし、散乱の断面積と幾何学的な断面積は異なるということに注意しておきたい。

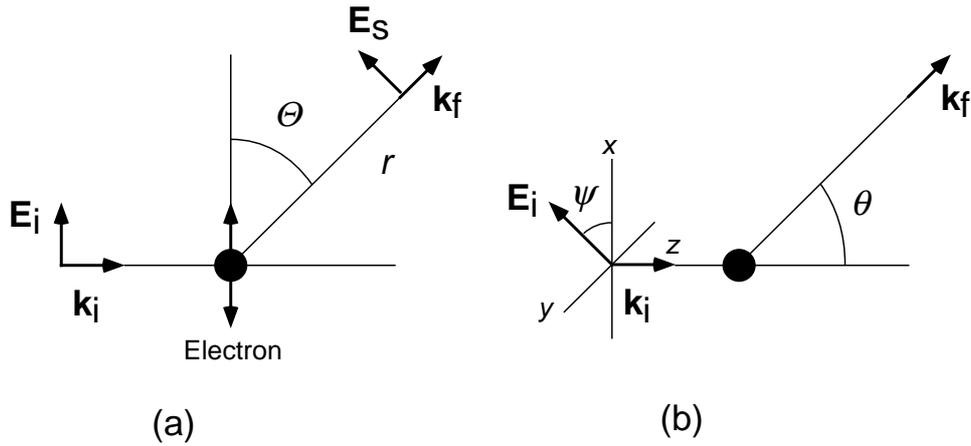


図 1: 自由電子による電磁波の散乱。直線偏光の場合 (a) と無偏光の場合 (b)

2 自由電子による散乱

自由電子による電磁波の散乱を考えよう。図 1 の (a) のように、自由電子に電磁波が入射する時、電子の運動方程式は

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -e \mathbf{E}_i(t) \quad (9)$$

で表される。ここで、 m_e は電子の質量 ($9.1 \times 10^{-31} \text{kg}$) である。入射波が単色波の場合で $\mathbf{E}_i(t) = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$ とすると、方程式の解は

$$\mathbf{x} = \frac{e \mathbf{E}_0}{m_e \omega^2} e^{i\omega t} \quad (10)$$

である。この運動によって時間的に変化する双極子が形成され、双極子放射により散乱波が発生する。双極子放射の公式を使うと、散乱波の波動域での電場は、

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t) = -\frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \{ \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{p}(\omega)] \} e^{i\omega(t-r/c)} \quad (11)$$

$$\mathbf{p}(\omega) = -\frac{e^2 \mathbf{E}_0}{m_e \omega^2} \quad (12)$$

で表される。また、この散乱波のポインティングベクトルの時間平均は

$$|\bar{\mathbf{S}}_s| = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \frac{e^4 |\mathbf{E}_0|^2}{m_e^2} \sin^2 \Theta \quad (13)$$

である。ここで、 Θ は \mathbf{n} と \mathbf{E}_0 のなす角である。入射電磁波のポインティングベクトルの時間平均は $|\mathbf{E}_0|^2 / (2c\mu_0)$ なので

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e c^2} \right)^2 \sin^2 \Theta = a_0^2 \sin^2 \Theta \quad (14)$$

と表される。ここで、 a_0 は電子の古典半径と呼ばれる量である。

これまでの計算では、入射波が直線偏光の場合を計算してきたが、入射波が無偏光の場合は、偏光の方向で平均をとる。図 18 の (b) のように入射波の入射方向を z 軸に、散乱光の方向ベクトルが xz 面内になるように座標系を取ると、 $\mathbf{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$ 、 $\mathbf{E}_0 = E_0 (\cos \psi, \sin \psi, 0)$ と表すことができる。この時、

$$\cos \Theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0 / |\mathbf{E}_0| = \cos \psi \sin \theta \quad (15)$$

となるので、 ψ で平均をとると

$$\overline{\sin^2 \Theta} = 1 - \overline{\cos^2 \Theta} = 1 - \sin^2 \theta / 2 = (1 + \cos^2 \theta) / 2 \quad (16)$$

となる。このようにすると θ は入射波と散乱波の間の角度を表す。これを式 (14) に代入すると

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = a_0^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \quad (17)$$

という式が得られる。これを全立体角で積分すると

$$\sigma = \int_0^\pi a_0^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{8\pi}{3} a_0^2 = \sigma_T \quad (18)$$

となる。

このような自由電子による散乱（弾性散乱）をトムソン (Thomson) 散乱といい、式 (18) をトムソン散乱の散乱断面積という。

入射電磁波の振動数が X 線や γ 線の領域まで高くなると、電磁波から自由電子へのエネルギーと運動量の移行が顕著になり、非弾性散乱になる。このような散乱はコンプトン (Compton) 散乱という。この散乱での電磁波の波長変化は、電磁波が散乱される角度を θ とすると

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (19)$$

で与えられる¹。ここで h はプランク定数 ($6.6 \times 10^{-34} \text{Js}$) である。

3 レイリー散乱

もし、電子の運動が自由粒子ではなく調和振動子で表される時は、運動方程式が

$$m_e \left(\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \omega_0^2 \mathbf{x} \right) = -e \mathbf{E}_i(t) \quad (20)$$

で、単色波に対する方程式の解は

$$\mathbf{x} = -\frac{e \mathbf{E}_0}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} \quad (21)$$

である。もし、 $\omega \gg \omega_0$ の場合は自由電子の時に帰着されるので、 $\omega \ll \omega_0$ の場合を考えよう。この時は、トムソン散乱の断面積に $(\omega/\omega_0)^4$ を掛ければよいことはすぐに分かる。したがって、全散乱断面積は

$$\sigma = \sigma_T \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \quad (22)$$

となる。このような散乱をレイリー (Rayleigh) 散乱という。この散乱の特徴は散乱断面積が振動数の 4 乗に比例していることである。前に述べたように、原子・分子で電子の運動による分極では ω_0 は紫外線の領域である。そのため、可視光の領域では、レイリー散乱の公式が適用できて、波長の短い光ほど散乱されやすいことが分かる。

束縛電子ではなく、球形の誘電体の場合を考えよう。この物体の半径を a 、誘電率を ε とする。球の半径が電磁波の波長に比べて十分小さいとすると内部に誘起される双極子モーメントは、一様な電場の中の誘電体球の場合と同じと考えてよいだろう。この双極子の大きさは

$$\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)a^3}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \mathbf{E}_0 \quad (23)$$

¹この散乱の断面積の計算には相対論的な場の量子論が必要である。

である。したがって、式 (22) の中で、

$$\frac{e^2}{m_e \omega_0^2} \rightarrow 4\pi \epsilon_0 \frac{(\epsilon - \epsilon_0) a^3}{2\epsilon_0 + \epsilon}$$

という置き換えを行うことで散乱断面積を求めることができる。結果は

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} \right)^2 a^6 \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 \propto \frac{a^6}{\lambda^4} \quad (24)$$

となり、球の半径の 6 乗に比例し波長に 4 乗に反比例する。空気中を漂う微粒子によって太陽光が散乱される時、波長の短い光が散乱されやすいので空の色が青く見え、赤い光ほど散乱されにくいので、夕焼けが見えるという現象はこのレイリー散乱によるものである。

また、光ファイバーを使った光伝送では、ファイバーの媒質の吸収と散乱によって減衰量が決まるが、散乱のほとんどはこのレイリー散乱である。したがって、波長の長い光を用いた方が散乱損失を抑えることができる。しかし、波長がある程度以上長くなると、吸収が増え始める。つまり、最適な波長が存在する。石英のファイバーの場合には、波長約 $1.5\mu\text{m}$ の光が用いられている。

4 分布した散乱体による散乱

散乱体が分布している場合には、各点からの散乱波を重ね合わせる必要がある。今、点 \mathbf{r}_j という点に散乱体があり、また、入射波は平面波で

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} \quad (25)$$

とする。ここで、 $|\mathbf{k}_i| = k = \omega/c$ を満たす。散乱体には、入射電場により、

$$\mathbf{p}_j(t) = \alpha \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_j, t) \quad (26)$$

という双極子モーメントが誘起され²、散乱波が放射される。これを十分遠くから観察すると

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2} \sum_j \frac{\mathbf{n}_j \times [\mathbf{n}_j \times \ddot{\mathbf{p}}_j(t - R_j/c)]}{R_j} \quad (28)$$

である。ここで、 $\mathbf{R}_j = \mathbf{r} - \mathbf{r}_j$ 、 $R_j = |\mathbf{R}_j|$ 、 $\mathbf{n}_j = \mathbf{R}_j/R_j$ である。さらに、

$$\frac{1}{R_j} \approx \frac{1}{r} \quad (29)$$

$$\mathbf{n}_j \approx \mathbf{n} \quad (30)$$

$$R_j \approx r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_j}{r} = r - \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{n} \quad (31)$$

$$(32)$$

と近似してもよい。これらの関係を式 (28) に代入すると

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t) = -\frac{\alpha \omega^2 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) g(\mathbf{q}) \quad (33)$$

$$g(\mathbf{q}) = \sum_j \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j) \quad (34)$$

²外部電場が小さい時には双極子モーメントは外部電場に比例し、

$$\mathbf{p}(\omega) e^{i\omega t} = \alpha(\omega) \mathbf{E}(\omega) e^{i\omega t} \quad (27)$$

と書ける。この α を分極率という。一般には周波数の関数である。

ここで、

$$\mathbf{k}_f = \mathbf{n}k \quad (35)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f \quad (36)$$

である。この \mathbf{q} は、入射波と散乱波の波数ベクトルの差で、散乱波の観測方向を決めると、 \mathbf{q} が決まり、 \mathbf{k}_f と \mathbf{k}_i のなす角を θ とすると、

$$q^2 = k_f^2 + k_i^2 - 2k_f k_i \cos \theta = 2k^2(1 - \cos \theta) \quad (37)$$

である。そして、式 (34) は散乱体の空間分布のフーリエ変換を計算しているわけで、式 (33) は、ちょうど \mathbf{q} の波数成分が散乱波に寄与することを示している。

4.1 空間格子による散乱

結晶のように散乱体が格子点に分布している場合を考える。各格子点の位置は、基本ベクトル \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} と整数、 l 、 m 、 n を用いて $\mathbf{r}_j = l\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{c}$ で指定される。また、 L 、 M 、 N はそれぞれの方向の格子点の数を表すとすれば、 g を計算すると

$$g = \sum_{l,m,n} \exp[-i\mathbf{q} \cdot (l\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{c})] = \left(\frac{1 - e^{-iL\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}}}{1 - e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}}} \right) \left(\frac{1 - e^{-iM\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}}}{1 - e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}}} \right) \left(\frac{1 - e^{-iN\mathbf{q} \cdot \mathbf{c}}}{1 - e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{c}}} \right) \quad (38)$$

である。散乱波の強度は $|g|^2$ に比例するが、これは、任意に整数 h 、 k 、 l に対して、

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{a} = 2\pi h, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{b} = 2\pi k, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{c} = 2\pi l \quad (39)$$

を満たす時、大きな値となる。この条件はラウエの条件と呼ばれ、

$$\mathbf{q} = 2\pi \mathbf{h} \quad (40)$$

$$\mathbf{h} = h\mathbf{a}^* + k\mathbf{b}^* + l\mathbf{c}^* \quad (41)$$

と書くことができる。この \mathbf{h} は逆格子ベクトル、また、

$$\mathbf{a}^* = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} \quad (42)$$

$$\mathbf{b}^* = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} \quad (43)$$

$$\mathbf{c}^* = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} \quad (44)$$

は単位逆格子ベクトルと呼ばれ、

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{a} &= 1, & \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{c} = 0 \\ \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{b} &= 1, & \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{a} = 0 \\ \mathbf{c}^* \cdot \mathbf{c} &= 1, & \mathbf{c}^* \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{c}^* \cdot \mathbf{b} = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

という関係を満たす。逆格子ベクトルを与えると、それを法線に持つ格子面が決まる。式 (40) は、結晶によるブラッグ (Bragg) 回折と同じ関係を表している。結晶による回折では、結晶の各格子点が散乱体となり、その周期的な分布によって回折が引き起こされるのである。

参考文献

- [1] 平川浩正：「電気力学」(培風館、1973年)。
- [2] 高良和武、菊田惺志：「X線回折技術」(東京大学出版会、1979年)。