

『電磁気学第2』講義概要 No.3【電磁波の散乱】

散乱現象：電磁波が荷電粒子や非一様な媒質と相互作用 → 入射電磁波とは異なる方向への電磁波が放射、弾性散乱：周波数変化なし、非弾性散乱：周波数変化あり

1 散乱断面積

入射波 $\mathbf{E}_i$ 、散乱波 $\mathbf{E}_s$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s \quad (1)$$

十分離れた点 → 散乱波は球面波

$$|\mathbf{E}_s| \propto \frac{1}{r} \quad (2)$$

$$\mathbf{B}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{E}/c \quad (\mathbf{n} = \mathbf{r}/r) \quad (3)$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4)$$

散乱波のポインティングベクトル

$$\mathbf{S}_s = \frac{\mathbf{E}_s \times \mathbf{B}_s}{\mu_0} = \frac{|\mathbf{E}_s|^2}{\mu_0 c} \mathbf{n} \quad (5)$$

半径 r の球面上、立体角 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ 内に散乱される電磁波のエネルギーは単位時間当たり（平均をとると）

$$dW = \frac{|\mathbf{E}_s|^2}{\mu_0 c} r^2 d\Omega \quad (6)$$

微分散乱断面積 入射波の単位時間・単位面積あたりのエネルギー、（ポインティングベクトルの（時間平均の）絶対値）との比

$$dW/|\mathbf{S}_i| = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (7)$$

全断面積 全立体角で積分したもの

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (8)$$

散乱の全エネルギー

$$W = \sigma |\mathbf{S}_i| \quad (9)$$

2 自由電子による散乱

自由電子による散乱（弾性散乱）：トムソン (Thomson) 散乱

電子（質量 $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{kg}$ ）の運動方程式

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -e \mathbf{E}_i(t) \quad (10)$$

入射波（直線偏光）： $\mathbf{E}_i(t) = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$

$$\mathbf{x} = \frac{e \mathbf{E}_0}{m_e \omega^2} e^{i\omega t} \quad (11)$$

時間的に変化する双極子 → 双極子放射

散乱波の波動域での電場（双極子放射の公式）

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t) = -\frac{\omega^2 e^{i\omega(t-r/c)}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \{ \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{p}(\omega)] \} \quad (12)$$

$$\mathbf{p}(\omega) = -\frac{e^2 \mathbf{E}_0}{m_e \omega^2} \quad (13)$$

散乱波のポインティングベクトル（時間平均）

$$|\overline{\mathbf{S}}_s| = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \frac{e^4 |\mathbf{E}_0|^2}{m_e^2} \sin^2 \Theta \quad (14)$$

（ Θ は $\mathbf{n}$ と $\mathbf{E}_0$ のなす角）

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0^2 m_e c^2} \right)^2 \sin^2 \Theta = a_0^2 \sin^2 \Theta \quad (15)$$

（ a_0 ：電子の古典半径）

入射波：無偏光の場合 → 偏光の方向で平均

$\mathbf{n} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$ 、 $\mathbf{E}_0 = E_0(\cos\psi, \sin\psi, 0)$

$$\cos\Theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0/|\mathbf{E}_0| = \cos\psi \sin\theta \quad (16)$$

ψ で平均

$$\overline{\sin^2 \Theta} = 1 - \overline{\cos^2 \Theta} = 1 - \sin^2 \theta / 2 = (1 + \cos^2 \theta) / 2 \quad (17)$$

（ θ は入射波と散乱波の間の角度）

式 (15) に代入

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = a_0^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \quad (18)$$

全立体角で積分 → トムソン散乱の散乱断面積

$$\sigma = \int_0^\pi a_0^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} 2\pi \sin\theta d\theta = \frac{8\pi}{3} a_0^2 = \sigma_T \quad (19)$$

3 レイリー散乱

束縛電子による散乱：レイリー (Rayleigh) 散乱
束縛電子 (調和振動子) の運動方程式

$$m_e \left(\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \omega_0^2 \mathbf{x} \right) = -e \mathbf{E}_i(t) \quad (20)$$

$$\mathbf{x} = -\frac{e \mathbf{E}_0}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} \quad (21)$$

$\omega \gg \omega_0 \rightarrow$ 自由電子と同じ

$\omega \ll \omega_0 \rightarrow$ トムソン散乱の断面積 $\propto (\omega/\omega_0)^4$

$$\sigma = \sigma_T \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \quad (22)$$

散乱断面積 $\propto$ 振動数の 4 乗 $\rightarrow$ 波長の短い光ほど散乱されやすい

4 分布した散乱体による散乱

分布した散乱体：各点からの散乱波を重ね合わせ
 j 番目の散乱体の座標：点 $\mathbf{r}_j$

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} \quad (|\mathbf{k}_i| = k = \omega/c) \quad (23)$$

散乱体の誘起双極子モーメント (α ：分極率)¹

$$\mathbf{p}_j(t) = \alpha \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_j, t) \quad (25)$$

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \sum_j \frac{\mathbf{n}_j \times [\mathbf{n}_j \times \ddot{\mathbf{p}}_j(t - R_j/c)]}{R_j} \quad (26)$$

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{r} - \mathbf{r}_j, \quad R_j = |\mathbf{R}_j|, \quad \mathbf{n}_j = \mathbf{R}_j/R_j$$

$$\frac{1}{R_j} \approx \frac{1}{r} \quad (27)$$

$$\mathbf{n}_j \approx \mathbf{n} \quad (28)$$

$$R_j \approx r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_j}{r} = r - \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{n} \quad (29)$$

式 (26) に代入

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\alpha \omega^2 e^{i(\omega t - k r)}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) g(\mathbf{q}) \quad (30) \\ g(\mathbf{q}) &= \sum_j \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j) \quad (31) \end{aligned}$$

¹外部電場が小さい時には双極子モーメントは外部電場に比例し、

$$\mathbf{p}(\omega) e^{i\omega t} = \alpha(\omega) \mathbf{E}(\omega) e^{i\omega t} \quad (24)$$

と書ける。この α を分極率という。一般には周波数の関数である。

$$\mathbf{k}_f = \mathbf{n}k \quad (32)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f \quad (33)$$

$\mathbf{q}$ ：入射波と散乱波の波数ベクトルの差：観測方向で決まる $\mathbf{k}_f$ と $\mathbf{k}_i$ のなす角を θ

$$q^2 = k_f^2 + k_i^2 - 2k_f k_i \cos \theta = 2k^2(1 - \cos \theta) \quad (34)$$

式 (31)：散乱体の空間分布のフーリエ変換： $\mathbf{q}$ の波数成分が散乱波に寄与する

4.1 空間格子による散乱

空間格子点：結晶など

基本ベクトル $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 、整数、 l 、 m 、 n

$$\mathbf{r}_j = l\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{c} \quad (35)$$

L 、 M 、 N ：格子点の数

$$\begin{aligned} g &= \sum_{l,m,n} \exp[-i\mathbf{q} \cdot (l\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{c})] \\ &= \left(\frac{1 - e^{-iL\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}}}{1 - e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{a}}} \right) \left(\frac{1 - e^{-iM\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}}}{1 - e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}}} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1 - e^{-iN\mathbf{q} \cdot \mathbf{c}}}{1 - e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{c}}} \right) \quad (36) \end{aligned}$$

散乱波の強度は $|g|^2$ に比例：任意に整数 h 、 k 、 l

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{a} = 2\pi h, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{b} = 2\pi k, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{c} = 2\pi l \quad (37)$$

を満たす時、最大：ラウエの条件

$$\mathbf{q} = 2\pi \mathbf{h} \quad (38)$$

$$\mathbf{h} = h\mathbf{a}^* + k\mathbf{b}^* + l\mathbf{c}^* \quad (39)$$

$\mathbf{h}$ ：逆格子ベクトル

$$\mathbf{a}^* = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} \quad (40)$$

$$\mathbf{b}^* = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} \quad (41)$$

$$\mathbf{c}^* = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} \quad (42)$$

単位逆格子ベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{a} &= 1, & \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{c} = 0 \\ \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{b} &= 1, & \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{a} = 0 \\ \mathbf{c}^* \cdot \mathbf{c} &= 1, & \mathbf{c}^* \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{c}^* \cdot \mathbf{b} = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

逆格子ベクトル：格子面を決める $\rightarrow$ 結晶によるブラッグ (Bragg) 回折と同じ関係