『電磁気学第２』講義資料 No.4 問題解答

1. アルミと銅の電気伝導度は表 1 に与えてある。また、これらの物質の透磁率はほとんど μ_0 に等しい。したがって、アルミの場合、1.1cm、銅の場合は 8.9mm となる。鉄は強磁性体のため、磁化と磁場が比例しないので透磁率の定義が難しい。そこで、何も磁化の影響を受けていない場合の比透磁率（初期比透磁率）を目安に考える。良質の純鉄では、1000 くらいの値である。また、電気伝導度は $1.1 \times 10^7 \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ 程度なので、これらの値を使って計算すると 0.7mm くらいになる。

2. 電流が通過できる部分の面積は $2\pi a\delta$ である。したがって、抵抗値は $\pi a^2/(2\pi a\delta) = a/(2\delta)$ 倍になる。銅の場合には、1MHz の周波数では $\delta = 6.3 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}$ なので、約 4 倍になる。

3. 考えている領域が単連結でなく、f が多価関数になるので $\oint \mathrm{grad}\, f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \neq 0$ となりうる。そこで、領域を単連結な 3 つ領域に分けて、それぞれの領域でストークスの定理を用いると穴を 1 周する任意の曲線 C に対して、
$$\oint_C (\mathbf{A} + \frac{m}{nq^2}\mathbf{i}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \oint_{C_0} (\mathbf{A} + \frac{m}{nq^2}\mathbf{i}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \tag{1}$$
を示すことができる。ここで、C_0 は穴の周囲を表す曲線である。また、C で張られる曲面 S を考えると
$$\Phi = \int_S B_n \mathrm{d}S = \int_{S_0} B_n \mathrm{d}S + \int_{S_1} B_n \mathrm{d}S = \oint_{C_0} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + \int_{S_1} B_n \mathrm{d}S \tag{2}$$
である。ここで、S_0 は C_0 で張られる曲面、S_1 は C_0 と C_1 で張られる曲面である。ロンドン方程式を使うと
$$\int_{S_1} B_n \mathrm{d}S = -\frac{m}{nq^2}\oint_C \mathbf{i} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + \frac{m}{nq^2}\oint_{C_0} \mathbf{i} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} - \oint_{C_0} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \tag{3}$$
よって、
$$\Phi = \int_S B_n \mathrm{d}S = \oint_{C_0} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} - \oint_{C_0} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \tag{4}$$
である。条件から、C 上では $\mathbf{i} = 0$ としてよい。よって、
$$\Phi = \oint_C \mathrm{grad}\, f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \tag{5}$$
である。

4. 球の中心を原点とする。原点に時気モーメント $bfm = (0, 0, -m)$ を置くと、このモーメントの作る磁場は
$$\mathbf{B}_\mathrm{d} = -\frac{\mu_0 m}{4\pi r^5}(3zr\mathbf{e}_r - r^2\mathbf{e}_z) \ \ (\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r) \tag{6}$$
となる。元の磁場を加えると
$$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z - \frac{\mu_0 m}{4\pi r^5}(3zr\mathbf{e}_r - r^2\mathbf{e}_z) \tag{7}$$
で、条件は $r = a$ で $\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_r = 0$ である。$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z = \cos\theta$、$z = r\cos\theta$ を代入すると
$$\left(B - \frac{m\mu_0}{2\pi a^3}\right)\cos\theta = 0 \tag{8}$$
である。したがって、
$$m = \frac{2\pi a^3 B}{\mu_0} \tag{9}$$
とすればよい。これを用いると
$$\mathbf{B} = B\left[\mathbf{e}_z - \frac{a^3}{2r^5}(3zr\mathbf{e}_r - r^2\mathbf{e}_z)\right] \tag{10}$$

5. 略

6. 2 つの式から、Π を消去すると

$$\theta = T\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}T} \tag{11}$$

となる。したがって、

$$\alpha = \int \frac{\theta}{T}\mathrm{d}T \tag{12}$$

となる。トムソン係数は、単一の金属で測定できるので、この式からゼーベック係数を求めることができるが、実際は難しい。そこで、鉛のトムソン係数が小さいことが分かっているので、鉛を基準にしてゼーベック係数が測定される場合が多い。