

『電磁気学第2』講義概要 No.4【導体と電磁場】

1 オームの法則と表皮効果

金属：オームの法則が成り立つ (σ は電気伝導度)

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} \quad (1)$$

電流を運ぶ粒子 (キャリア) の運動方程式 (q はキャリアの電荷)

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m\gamma \mathbf{v} + q\mathbf{E} \quad (2)$$

定常状態： $dv/dt = 0 \rightarrow \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}$

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{q}{m\gamma} \mathbf{E} \quad (3)$$

キャリアの密度 n

$$\mathbf{i} = qn\bar{\mathbf{v}} = \frac{q^2 n}{m\gamma} \mathbf{E} \quad (4)$$

電気伝導度 σ^1

$$\sigma = \frac{q^2 n}{m\gamma} \quad (5)$$

オームの法則+マックスウェルの方程式 (透磁率: μ 、誘電率 ε)

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad (8)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (9)$$

式 (6) の両辺の発散

$$0 = \frac{\sigma \rho}{\varepsilon} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (10)$$

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\sigma t/\varepsilon} \quad (11)$$

銅： $\sigma = 6.5 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ 、 $\varepsilon \sim \varepsilon_0$

$\rightarrow \varepsilon/\sigma = 1.4 \times 10^{-19} \text{s}$

ポリエチレン：、 $\sigma < 10^{-14} \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ 、 $\varepsilon \sim 2\varepsilon_0$

$\rightarrow \varepsilon/\sigma > 1.8 \times 10^3 \text{s}$

¹ $\mu = q/m\gamma$ は易動度と呼ばれる量であるが、透磁率と記号が紛らわしいので使わない。

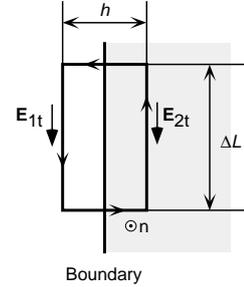


図 1: 電場の接線成分に対する境界条件の計算

1.1 導体表面の境界条件

オームの法則 \rightarrow ジュール熱の発生 (単位時間・単位体積あたり)

$$\delta w = \mathbf{i} \cdot \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}^2 \quad (12)$$

静的な場：エネルギーの供給源が存在しない \rightarrow 導体内に電場は存在しない。

電場の接線成分 (図 1) E_{it} ($i = 1, 2$): 各領域での電場の接線成分、 \mathbf{n} : ループの作る面の法線ベクトル

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int \text{rot } \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= \Delta L (E_{1t} - E_{2t}) \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} h \Delta L \frac{\partial (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

任意の境界面で電場の接線成分が連続 \rightarrow 導体: 静的な場では表面で接線成分は 0 \rightarrow 電場は導体の表面に垂直 \rightarrow 静電ポテンシャルは導体表面で一定

電場の垂直成分 D_{in} ($i = 1, 2$): 電束密度の境界面に対する法線成分、 σ_n : 表面電荷密度²

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int \text{div } \mathbf{D} d^3 \mathbf{r} &= \Delta S (D_{1n} - D_{2n}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int \rho d^3 \mathbf{r} = \Delta S \sigma_n \end{aligned} \quad (14)$$

²導体の内部には電荷は存在できず、表面に極めて薄い層 (表面電荷) として存在し、その密度は単位面積あたりの電荷で定義される。

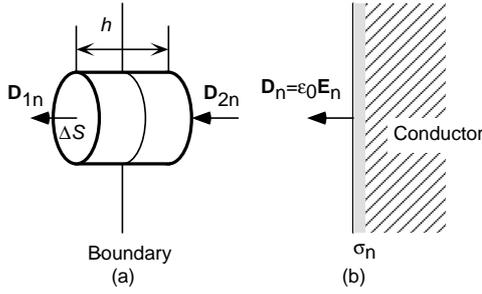


図 2: 電束密度の法線成分に対する境界条件の計算

導体中: 電場が存在しない → 電束密度も存在しない: 領域 1 を真空、領域 2 を導体 (図 2(b))

$$\sigma_n = D_n = \epsilon_0 E_n \quad (15)$$

静電誘導: 外部からの電場による導体の表面電荷の誘起

1.2 表皮効果

導体中の変動電磁場 (図 3)

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (16)$$

$\text{rot rot} = \text{grad}(\text{div}) - \Delta$, $\text{div } \mathbf{E} = 0$

$$\left(\Delta - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (17)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-(ik+\kappa)z+i\omega t}$$

$$(ik + \kappa)^2 - i\omega\sigma\mu + \mu\epsilon\omega^2 = 0 \quad (18)$$

$$k = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\omega\epsilon}{\sigma} + \sqrt{1 + \frac{\omega^2\epsilon^2}{\sigma^2}} \right)^{1/2} \quad (19)$$

$$\kappa = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\omega\epsilon}{\sigma} + \sqrt{1 + \frac{\omega^2\epsilon^2}{\sigma^2}} \right)^{-1/2} \quad (20)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\omega\mu}} \quad (21)$$

$$\epsilon\omega/\sigma \ll 1$$

$$k = \kappa = \frac{1}{\delta} \quad (22)$$

変動電磁場 → 表面しか存在しない: 表皮効果

δ : 表皮の厚さ (skin depth)

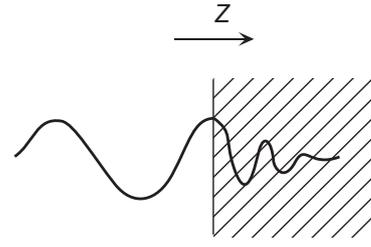


図 3: 表皮効果

半径 a の導線 (z 軸に平行、図 4): $E_x = E_y = 0$, $\partial E_z / \partial z = 0 \rightarrow \text{div } \mathbf{E} = 0$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = i\omega\mu\sigma E_z \quad (23)$$

円柱座標:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} = i\omega\mu\sigma E_z \quad (24)$$

軸対称: $\partial E_z / \partial \theta = 0$

$$\frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_z}{dr} = i\omega\mu\sigma E_z \quad (25)$$

$$i\omega\mu\sigma = \left(\frac{1+i}{\delta} \right)^2 \quad (26)$$

$$\xi = r(1+i)/\delta$$

$$\frac{d^2 E_z}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dE_z}{d\xi} - E_z = 0 \quad (27)$$

$a > \delta$, すなわち $|\xi| \gg 1$: 第 2 項を無視³

$$E_z \approx Ae^\xi + Be^{-\xi} \quad (28)$$

$\text{Re}[\xi] > 0$, $|A| \approx |B| \rightarrow |Ae^\xi| \gg |Be^{-\xi}|$ である。

$$|E_z| \propto |e^\xi| = e^{r/\delta} \quad (29)$$

1.3 完全導体

完全導体: 電気伝導度が無限大 (電気抵抗が 0) の導体 → 式 (2): $\gamma = 0$

電流密度

$$\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} = \frac{nq^2}{m} \mathbf{E} \quad (30)$$

³この解は、0 次第 1 種変形ベッセル関数 $I_0(x)$ で表現できる。もう一つの独立な解 0 次第 2 種変形ベッセル関数 $K_0(x)$ は $r = 0$ で発散するので適当でない。また、 $I_0(z) \approx (e^z + ie^{-z})/\sqrt{2\pi z}$ という漸近形を持つという事実を利用した。

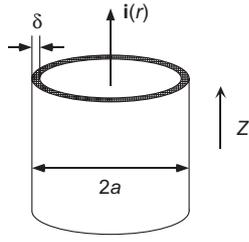


図 4: 円筒導線の表皮効果

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{B} + \frac{m}{nq^2} \text{rot } \mathbf{i} \right) = 0 \quad (31)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{m}{nq^2} \text{rot } \mathbf{i} + \mathbf{B}_0 \quad \left(\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = 0 \right) \quad (32)$$

\mathbf{B}_0 : 時間変化の無い任意の磁場 → 静的な磁場には制限なし

$\mathbf{B}_0 = 0$ の場合

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \mu_0 \text{rot } \mathbf{i} = -\frac{\mu_0 nq^2}{m} \mathbf{B} \quad (33)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \text{grad div } \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{B}$$

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{\mu_0 nq^2}{m} \mathbf{B} \quad (34)$$

\mathbf{B} : x だけに依存

$$\frac{d^2 \mathbf{B}}{dx^2} = \frac{\mu_0 nq^2}{m} \mathbf{B} \quad (35)$$

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}_1 e^{-x/\lambda} + \mathbf{B}_2 e^{x/\lambda} \quad \left(\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 nq^2}} \right) \quad (36)$$

完全導体が $x > 0$ の領域 → $\mathbf{B}_2 = 0$ → 磁場は表面から λ 程度の距離しか存在しない → マイスナー効果 (超伝導体) → 超伝導体では $\mathbf{B}_0 = 0$ が成り立ち、静的な磁場まで含めて排除⁴

ロンドン方程式⁵

$$\mathbf{B} = -\frac{m}{nq^2} \text{rot } \mathbf{i} \quad (37)$$

超伝導体に対しての磁場の境界条件: マイスナー効果により \mathbf{B} の法線成分が 0

⁴ λ は磁場侵入長と呼ばれる。

⁵ 完全導体という条件だけではこの方程式が成り立つことを示すことはできず、導くためには量子力学が必要であるが、時間変動する場に対しては完全に排除される。これは、表皮効果で $\omega \neq 0$ の時、 $\sigma \rightarrow 0$ とすれば $\delta = 0$ となることから理解できる。

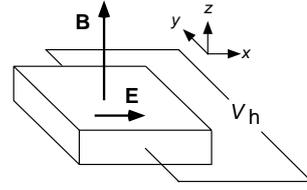


図 5: ホール効果

2 ホール効果

磁場中のキャリアの運動方程式

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m\gamma \mathbf{v} + q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (38)$$

定常状態 (外部電場は x 方向、磁場は z 方向とし、 $v_z = 0$ 、図 5)

$$m\gamma \bar{v}_x = q(E_x + \bar{v}_y B_z) \quad (39)$$

$$m\gamma \bar{v}_y = -q\bar{v}_x B_z \quad (40)$$

$$\bar{v}_x = \frac{qE_x}{m\gamma[1 + (qB_z/m\gamma)^2]} \quad (41)$$

$$\bar{v}_y = -\frac{q\bar{v}_x B_z}{m\gamma} \quad (42)$$

キャリア: y 方向に運動 → 電荷分布に偏り → 内部電場が発生

$$m\gamma \bar{v}_x = q(E_x + \bar{v}_y B_z) \quad (43)$$

$$m\gamma \bar{v}_y = q(E_y - \bar{v}_x B_z) \quad (44)$$

$$v_y = 0$$

$$E_y = \bar{v}_x B_z \quad (45)$$

ホール係数

$$R_H = \frac{E_y}{i_x B_z} = \frac{1}{qn} \quad (46)$$

3 熱電気効果

キャリアの運動: 熱エネルギーも運ぶ → 熱電気効果

3.1 ペルチェ効果

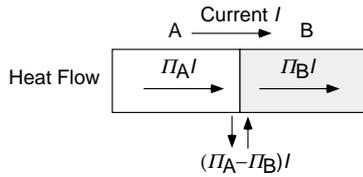


図 6: ペルチェ効果

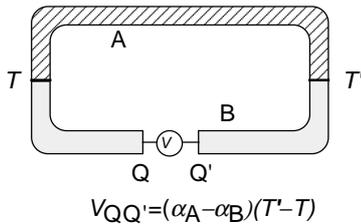


図 7: ゼーベック効果

電流に伴う熱エネルギーの流れ (図 6): 電流 I 、キャリア 1 個のもつ熱エネルギーを \tilde{h} 、熱流 J_H

$$J_H = \tilde{h} \frac{I}{q} = \Pi I \quad (47)$$

異種の物質を接合 (\tilde{h} や Π は物質によって異なる)

$$\frac{dQ}{dt} = (\Pi_A - \Pi_B)I = \Pi_{AB}I \quad (48)$$

の熱が、単位時間に発生または吸収される: ペルチェ効果、 Π : ペルチェ係数 (温度の関数)

3.2 ゼーベック効果

ゼーベック効果: 温度勾配に比例した起電力の発生 (ペルチェ効果の逆効果)

導体に温度勾配 \rightarrow 熱の流れと共に電荷も移動 \rightarrow 起電力が発生 \rightarrow 導体内に電荷分布と電位差が発生 \rightarrow 起電力を打ち消す

$$V_{th} = \alpha \Delta T \quad (49)$$

α : ゼーベック係数または熱電能

ゼーベック係数: 物質ごとに異なる \rightarrow 異種の導体を接合して温度差を持たせると温度差に比例した電位差が観測 (図 7) \rightarrow 熱電対ゼーベック係数: 温度の関数⁶

$$V_{QQ'} = \int_T^{T'} [\alpha_A(T) - \alpha_B(T)] dT \quad (50)$$

⁶一次関数となることが知られている。

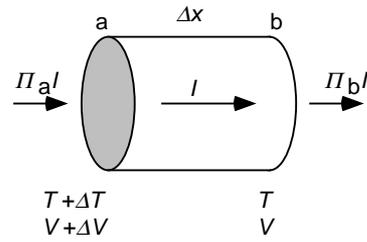


図 8: トムソン効果

トムソンの第 1 関係式

$$\frac{\Pi_{AB}}{T} = \alpha_{AB} \quad (51)$$

3.3 トムソン効果

温度差のある導体中 (断面積 S) の電流 (図 8) 断面 a と b: 距離 Δx 、電位差 ΔV 、温度差 ΔT
単位時間内に流れ込んだエネルギー: ΔQ

$$\Delta Q = \Delta V I + (\Pi_a - \Pi_b) I \quad (52)$$

$$\Delta V = \frac{\rho I}{S} \Delta x - \alpha \Delta T \quad (53)$$

$$\rho = 1/\sigma$$

$$\Pi_a - \Pi_b = \Pi(T + \Delta T) - \Pi(T) = \frac{d\Pi}{dT} \Delta T \quad (54)$$

$$\Delta Q = \frac{\rho I^2}{S} \Delta x + \left(\frac{d\Pi}{dT} - \alpha \right) \Delta T I \quad (55)$$

$I \Delta T$ に比例した項: トムソン効果

トムソンの第 2 関係式 (θ : トムソン係数)

$$\theta = \frac{d\Pi}{dT} - \alpha \quad (56)$$

問題

- 50Hz の振動電磁場に対する表皮の厚さを、代表的な金属 (銅、アルミニウム、鉄) について計算せよ。
- 直径 1mm の銅線に 1MHz の振動電流を流すと、電気抵抗の値は直流の場合に比べておよそ何倍になるか。振動電流は厚さ δ の円筒部分のみに流れると仮定して、計算を行えばよい。
- 式 (51) と式 (56) から Π を消去して、ゼーベック係数をトムソン係数の関数として表せ。