

『電磁気学第2』講義資料 No.4

【導体と電磁場】

物質の電磁気学的な特性のかなりの部分は、物質内の電子の状態によって決められる。これらは、本来は量子力学的に取り扱う必要があるが、古典論の範囲でもある程度は取扱うことができる。電子の運動は、絶縁体のように束縛された状態のある場合と金属のように自由に動くことができる場合では異なる。また、誘電体や磁性体では分極ベクトルや磁化ベクトルが電場や磁場の関数で与えられる。これらは、物質の特性を表す重要な要素である。

1 オームの法則と表皮効果

金属などではオームの法則が成り立つ。すなわち

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} \quad (1)$$

と、電流密度が電場に比例する。ここで、 σ は電気伝導度である。特に、金属では σ が非常に大きい。

表 1 に代表的な金属の電気伝導度を示す。

この時、電流を運ぶ粒子（キャリアという）の運動方程式を考えてみる。キャリアには、速度に比例する抵抗力も働くとして方程式をたてると、

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m\gamma \mathbf{v} + q\mathbf{E} \quad (2)$$

となる。ここで、 q はキャリアの電荷である。定常状態では、 $d\mathbf{v}/dt = 0$ だから、

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{q}{m\gamma} \mathbf{E} \quad (3)$$

となる。キャリアの密度を n とすれば、電流密度が

$$\mathbf{i} = qn\bar{\mathbf{v}} = \frac{q^2 n}{m\gamma} \mathbf{E} \quad (4)$$

なのでオームの法則が成り立ち、電気伝導度 σ は

$$\sigma = \frac{q^2 n}{m\gamma} \quad (5)$$

表 1: 金属の電気伝導度 (温度は 0°)

金属	σ ($\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$)
銀	6.8×10^7
銅	6.5×10^7
金	4.9×10^7
アルミニウム	4.0×10^7

と表される¹。結局、オーム法則に表れる電気抵抗はキャリアに働く速度に比例した抵抗力に起因するものであることがわかる。この抵抗力は、格子の熱振動や、欠陥、不純物によってキャリアが散乱されることで生じ、温度の関数である。

オームの法則とマックスウェルの方程式を組み合わせると、

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad (8)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (9)$$

が得られる。ここで、 μ や ε は考えている物質の透磁率や誘電率で、ここでは定数としておく。まず、式(6)の両辺の発散をとる。すると

$$0 = \frac{\sigma \rho}{\varepsilon} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (10)$$

が得られる。これを解けば、

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\sigma t / \varepsilon} \quad (11)$$

となる。たとえば、銅の場合、 $\sigma = 6.5 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ である。また、誘電率は定義が難しいが、ほぼ真空の値と考えてよい。すると $\varepsilon / \sigma = 1.4 \times 10^{-19} \text{s}$ という時間で、電荷密度は消失する。ただし、電荷自身は消滅するわけではなく、最終的には表面電荷となって表れる。

逆に、プラスチックなどの絶縁体を考えてみよう。たとえば、ポリエチレンを考えると、 $\sigma < 10^{-14} \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ といわれており、比誘電率は約 2 なので、 $\varepsilon / \sigma > 1.8 \times 10^3 \text{s}$ と極めて長い時間になる。

1.1 導体表面の境界条件

オームの法則が成り立つ場合には、

$$\delta w = \mathbf{i} \cdot \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}^2 \quad (12)$$

のエネルギーが単位時間・単位体積あたりジュール熱に変わるので、外部にエネルギーを供給するもの(電源)が存在しない限り、電流が流れることはない。したがって、静的な場では、導体内に電場は存在しない。

電磁誘導の式を用いると、図 1 のような計算により、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int \text{rot } \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \Delta L (E_{1t} - E_{2t}) = -\lim_{h \rightarrow 0} h \Delta L \frac{\partial (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})}{\partial t} = 0 \quad (13)$$

となる。ここで、 E_{it} ($i = 1, 2$) は、それぞれの領域での電場の接線成分で、 \mathbf{n} はループの作る面の法線ベクトルである。ここでは、ストークスの定理を用いた。この計算から任意の境界面で電場の接線成分が連続であるということが言える。したがって、導体の場合で、静的な場では導体の表面で電場の接線成分は 0 である。言いかえると、電場は導体の表面に垂直であるということである。これは、静電ポテンシャルで考えると導体表面でポテンシャルは一定ということに他ならない。

電場の垂直成分に関しては、ガウスの法則を利用し、図 2(a) のように考えると

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int \text{div } \mathbf{D} d^3 \mathbf{r} = \Delta S (D_{1n} - D_{2n}) = \lim_{h \rightarrow 0} \int \rho d^3 \mathbf{r} = \Delta S \sigma_n \quad (14)$$

である。ここで、 D_{in} ($i = 1, 2$) は電束密度の境界面に対する法線成分、 σ_n は表面電荷密度である。前に述べたように導体の内部には電荷は存在できず、表面に極めて薄い層として存在する。これが表面電荷で

¹ $\mu = q/m\gamma$ は易動度と呼ばれる量であるが、透磁率と記号が紛らわしいので使わない。

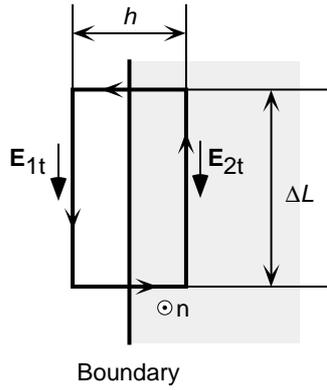


図 1: 電場の接線成分に対する境界条件の計算

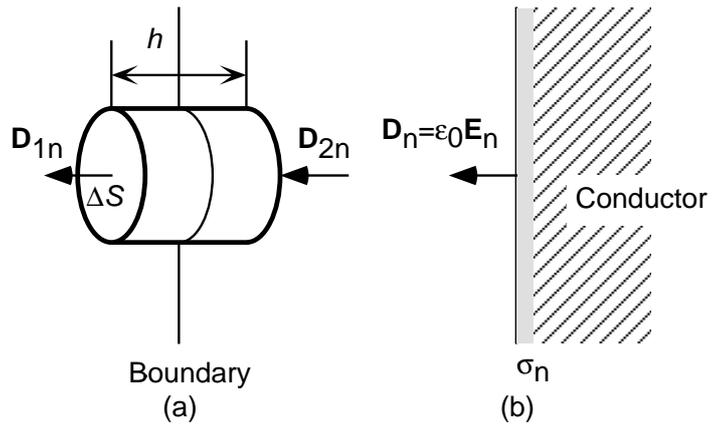


図 2: 電束密度の法線成分に対する境界条件の計算

その密度は単位面積あたりの電荷で定義される。導体中では電場が存在しないので電束密度も存在しない。したがって、図 2(b) のように領域 1 を真空、領域 2 を導体とすると

$$\sigma_n = D_n = \varepsilon_0 E_n \quad (15)$$

が成り立つ。このように外部からの電場で、導体の表面に電荷が表れることを静電誘導という。

1.2 表皮効果

次に、図 3(a) に示すように金属表面に電磁場が入射した場合を考えてみる。上の式 (6)-(9) から磁場を消去すると

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (16)$$

となり、 $\text{rot rot} = \text{grad}(\text{div}) - \Delta$ を用い、さらに、 $\text{div } \mathbf{E} = 0$ とすれば、

$$\left(\Delta - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (17)$$

である (この方程式は電信方程式と呼ばれる)。そして、電磁波が z 方向に進んでいるとすると、 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-(ik+\kappa)z+i\omega t}$ と書ける。すると、

$$(ik + \kappa)^2 - i\omega\sigma\mu + \mu\varepsilon\omega^2 = 0 \quad (18)$$

となるので、

$$k = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\omega\varepsilon}{\sigma} + \sqrt{1 + \frac{\omega^2\varepsilon^2}{\sigma^2}} \right)^{1/2} \quad (19)$$

$$\kappa = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\omega\varepsilon}{\sigma} + \sqrt{1 + \frac{\omega^2\varepsilon^2}{\sigma^2}} \right)^{-1/2} \quad (20)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\omega\mu}} \quad (21)$$

である。先ほど計算したように、金属などでは ε/σ はきわめて短い時間スケールを与えるので、 $\varepsilon\omega/\sigma \ll 1$ としてよい。この時

$$k = \kappa = \frac{1}{\delta} \quad (22)$$

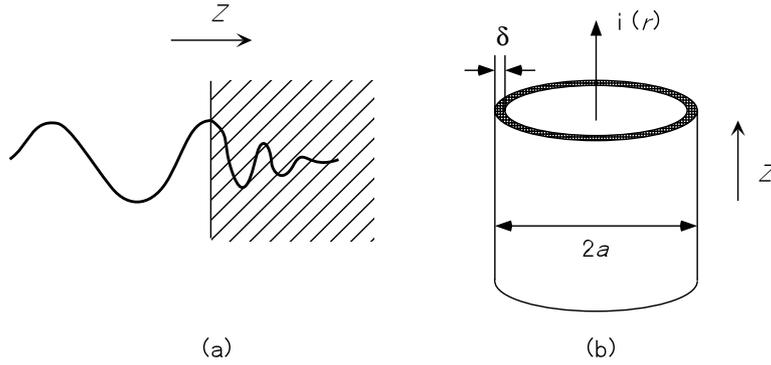


図 3: 表皮効果。金属に電磁波入射した場合 (a)、半径 a の導線に振動電流を流した場合 (b)

となる。この式に典型的な金属の値を入れてみると、振動する電界は金属内で急速に減衰することがわかる。したがって、電磁波は金属の表面付近にのみ存在する。このような効果を表皮効果という。そして、 δ は電磁波が金属内に存在する深さを表していて、表皮の厚さ (skin depth) と呼ばれている。この効果は、電磁誘導で金属表面に誘導電流が流れ、それが進入してくる電磁場を打ち消すために起きる。発生した誘導電流は電気抵抗が存在するのでジュール熱を発生し、エネルギーの損失を引き起こす。

実際の例に近いものとして、図 3(b) の半径 a の導線に振動電流が流れる場合を考えよう。式 (17) で、導線と電流の方向を z にすれば、 $E_x = E_y = 0$ と考えてよい。また、 z 方向に一樣ならば $\partial E_z / \partial z = 0$ で $\text{div } \mathbf{E} = 0$ を満たす。さらに、金属材料のようなものでは時間の 2 階微分の項は無視できるので、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = i\omega\mu\sigma E_z \quad (23)$$

である。さらに、この式を円柱座標で書き直すと

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} = i\omega\mu\sigma E_z \quad (24)$$

となる。対称性から E_z は θ に依存しないはずなので、

$$\frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_z}{dr} = i\omega\mu\sigma E_z \quad (25)$$

となる。さらに、

$$i\omega\mu\sigma = \left(\frac{1+i}{\delta} \right)^2 \quad (26)$$

なので、 $\xi = r(1+i)/\delta$ と置いて変数変換すると

$$\frac{d^2 E_z}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dE_z}{d\xi} - E_z = 0 \quad (27)$$

となる。この方程式は 0 次の変形ベッセル関数を使って解くことができるが²、ここでは $a > \delta$ 、すなわち $|\xi| \gg 1$ として、導線の表面に近い部分の振る舞いを調べることにする。その場合、第 2 項を無視することができるので、

$$E_z \approx Ae^\xi + Be^{-\xi} \quad (28)$$

²この解は、0 次第 1 種変形ベッセル関数 $I_0(x)$ で表現できる。もう一つの独立な解 0 次第 2 種変形ベッセル関数 $K_0(x)$ は $r = 0$ で発散するので適当でない。また、 $I_0(z) \approx (e^z + ie^{-z})/\sqrt{2\pi z}$ という漸近形を持つという事実を利用した。

である。今、 ξ の実部は正なので、 Ae^ξ は表面から中心に向かって減少し、 $Be^{-\xi}$ は増加する。ベッセル関数の解の性質を使うと、 $|A| \approx |B|$ でなければならないことが分かっているので、表面付近では $|Ae^\xi| \gg |Be^{-\xi}|$ である。よって、

$$|E_z| \propto |e^\xi| = e^{r/\delta} \quad (29)$$

なので、表面から δ 程度の部分にしか電場が存在しない。したがって、電流も表面付近のみに存在することを意味している。そのため、導線の等価的な断面積は非常に小さくなる。この表皮効果により、導線の電氣的な性質（抵抗値やインダクタンス）が流れる電流の周波数によって変化する。

1.3 完全導体

電気伝導度が無限大（電気抵抗が0）の導体（完全導体と呼ばれる）を考えよう。このような物質では、式(2)で、 $\gamma = 0$ と置いた式が成り立つ。そして、電流密度の関係式にすると

$$\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} = \frac{nq^2}{m} \mathbf{E} \quad (30)$$

である。この式と電磁誘導の式を組み合わせると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{B} + \frac{m}{nq^2} \text{rot } \mathbf{i} \right) = 0 \quad (31)$$

が成り立つ。この解は

$$\mathbf{B} = -\frac{m}{nq^2} \text{rot } \mathbf{i} + \mathbf{B}_0 \quad \left(\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = 0 \right) \quad (32)$$

となる。 \mathbf{B}_0 は時間変化の無い任意の磁場である。したがって、静的な磁場には完全導体は影響しない。次に、 $\mathbf{B}_0 = 0$ の場合を考えてみよう。このときには、アンペールの法則と組み合わせると、

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \mu_0 \text{rot } \mathbf{i} = -\frac{\mu_0 nq^2}{m} \mathbf{B} \quad (33)$$

であるが、 $\text{rot rot } \mathbf{B} = \text{grad div } \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{B}$ なので、

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{\mu_0 nq^2}{m} \mathbf{B} \quad (34)$$

となる。この式をたとえば、 \mathbf{B} が x だけに依存するとして方程式を立てると

$$\frac{d^2 \mathbf{B}}{dx^2} = \frac{\mu_0 nq^2}{m} \mathbf{B} \quad (35)$$

で、解は

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}_1 e^{-x/\lambda} + \mathbf{B}_2 e^{x/\lambda} \quad \left(\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 nq^2}} \right) \quad (36)$$

である。もし、完全導体が $x > 0$ の領域に存在していれば、 $\mathbf{B}_2 = 0$ でないと値が発散してしまう。この場合には、磁場は表面から λ 程度の距離しか存在しないこともわかる。このような現象は超伝導体に見られる現象で、マイスナー効果と呼ばれている。すなわち、超伝導体では $\mathbf{B}_0 = 0$ が成り立ち、静的な磁場まで含めて排除されるのである³。

$$\mathbf{B} = -\frac{m}{nq^2} \text{rot } \mathbf{i} \quad (37)$$

をロンドン方程式という。完全導体という条件だけではこの方程式が成り立つことを示すことはできず、導くためには量子力学が必要である⁴。

超伝導体に対する磁場の境界条件は、マイスナー効果により \mathbf{B} の法線成分が0である。

³ λ は磁場侵入長と呼ばれる。

⁴ 時間変動する場に対しては完全に排除される。これは、表皮効果で $\omega \neq 0$ の時、 $\sigma \rightarrow 0$ とすれば $\delta = 0$ となることから理解できる。

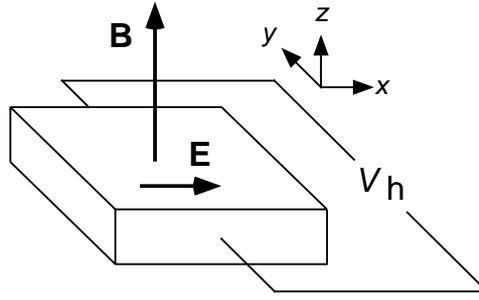


図 4: ホール効果

2 ホール効果

図 4 のように電流の流れる導体に磁場をかけた場合を考えてみよう。キャリアの運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m\gamma\mathbf{v} + q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (38)$$

となる。外部電場は x 方向、磁場は z 方向とし、 $v_z = 0$ としよう。すると、定常状態では

$$m\gamma\bar{v}_x = q(E_x + \bar{v}_y B_z) \quad (39)$$

$$m\gamma\bar{v}_y = -q\bar{v}_x B_z \quad (40)$$

となる。これを平均速度について解けば、

$$\bar{v}_x = \frac{qE_x}{m\gamma[1 + (qB_z/m\gamma)^2]} \quad (41)$$

$$\bar{v}_y = -\frac{q\bar{v}_x B_z}{m\gamma} \quad (42)$$

で、磁場の存在により、キャリアは y 方向にも速度を持つようになる。もし、導体の y 方向の大きさが有限だとするとこの運動により電荷分布に偏りが生じて内部に電場が発生する。そして、これが、磁場による y 方向の力と打ち消しあった状態で落ち着くと考えられる。この y 方向の電場を E_y として運動方程式を立てると

$$m\gamma\bar{v}_x = q(E_x + \bar{v}_y B_z) \quad (43)$$

$$m\gamma\bar{v}_y = q(E_y - \bar{v}_x B_z) \quad (44)$$

であり、 $\bar{v}_y = 0$ なら、

$$E_y = \bar{v}_x B_z \quad (45)$$

$$\bar{v}_x = \frac{qE_x}{m\gamma} \quad (46)$$

である。そこで、

$$R_H = \frac{E_y}{i_x B_z} \quad (47)$$

をホール係数という。式 (4) を使うと

$$R_H = \frac{1}{qn} \quad (48)$$

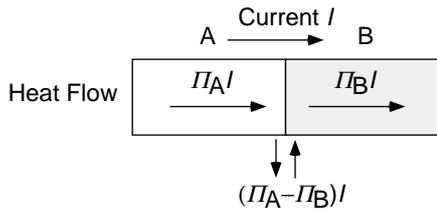


図 5: ペルチェ効果

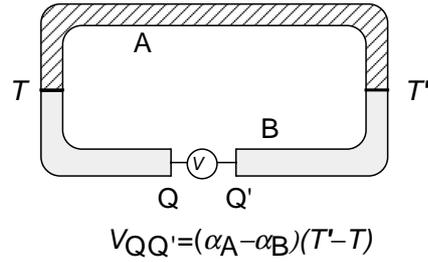


図 6: ゼーベック効果

となる。発生した y 方向の電場は、導体の y 方向の電位差を測定することで知ることができる。もし、電流を運ぶ粒子が電子ならば、ホール係数は負であるが、半導体などでは正の値を取る場合もある。これによって、導体中の電流を運ぶ粒子の電荷の符号、及び、密度の測定が可能になる。この測定と電気伝導度の測定で移動度の測定ができる。また、ホール効果を利用した素子（ホール素子）は、磁気センサーとして広く利用されている。

ところで、式 (43) と式 (44) を使って電流密度と電場の関係を表すと、

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_x \\ i_y \end{pmatrix} \quad (49)$$

$$\begin{pmatrix} i_x \\ i_y \end{pmatrix} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau \\ -\omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (50)$$

と書ける。ここで、 $\tau = 1/\gamma$ 、 $\omega_c = qB/m$ 、 $\sigma_0 = q^2 \tau / m$ である。このように、ホール効果があると電流密度と電場の関係は単純な比例関係ではなくなる。

3 熱電気効果

電気抵抗に電流を流すと、ジュール熱を発生することはよく知られている。しかし、それ以外にも電流と熱に関係した現象がある。

3.1 ペルチェ効果

電流とはキャリアの運動によって電荷が運ばれることであるが、キャリアは熱エネルギーも持っているので、電流に伴い熱エネルギーと一緒に運ばれる（図 5）。今、電流 I が流れているとし、キャリア 1 個のもつ熱エネルギーを \tilde{h} とすると、電流に伴う熱流 J_H は

$$J_H = \tilde{h} \frac{I}{q} = \Pi I \quad (51)$$

と表される。そして、この \tilde{h} や Π は物質によって異なるので、異種の物質を接合して電流を流すと、その境界では

$$\frac{dQ}{dt} = (\Pi_A - \Pi_B) I = \Pi_{AB} I \quad (52)$$

の熱が、単位時間に発生または吸収される。このような効果をペルチェ効果、 Π をペルチェ係数といい、 Π は温度の関数である。

通常は、ジュール熱の影響が大きいため、ペルチェ効果を観測するのは難しいが、 Π_{AB} が大きな物質の組み合わせを用いると、電流によって直接加熱・冷却が可能となる。更に、電流の向きを反転させると吸発

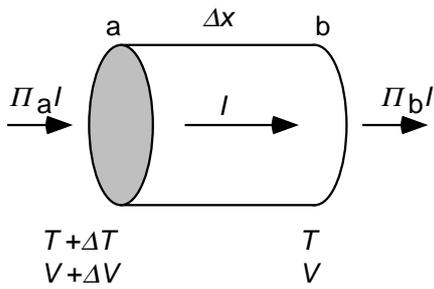


図 7: トムソン効果

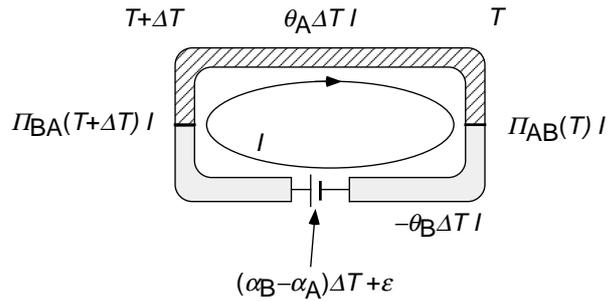


図 8: 熱電気効果と熱力学

熱が逆転するため、温度制御などによく使われるようになった。ただし、たとえば冷却に用いる場合、吸収した熱をどこかに放出しないといけないので、冷却器の放熱が重要になる。

3.2 ゼーベック効果

ペルチェ効果と逆の効果がゼーベック効果である。導体に温度勾配を与えると、熱の流れと共に電荷も移動する。そのため、起電力が発生する。そして、導体内に電荷分布と電位差が発生して、起電力を打ち消して落ち着く。すなわち、

$$V_{th} = \alpha \Delta T \quad (53)$$

である。この α はゼーベック係数または熱電能と呼ばれる。ゼーベック係数は物質ごとに異なるので、図 6 のように、異種の導体を接合して温度差を持たせると温度差に比例した電位差が観測され、回路を閉じれば電流が流れるようになる。これを熱電対という。逆に、熱電対に生じた電位差を測定すると、温度差がわかるので、温度測定に広く用いられている。また、ゼーベック係数は一般に温度の関数で、一次関数となることが知られている。そのため、両端の温度差が大きく、温度差の 1 次で近似できない時は、このゼーベック係数を温度の関数とし、

$$V_{QQ'} = \int_T^{T'} [\alpha_A(T) - \alpha_B(T)] dT \quad (54)$$

と積分して、熱起電力を求めないといけない。

熱電対を温度計として用いる場合、どの物質の組み合わせでどの程度の温度差が測定できるのかについては、JIS によって規格が決められている。また、ある物質 A と B の間で測定したゼーベック係数とペルチェ係数には

$$\frac{\Pi_{AB}}{T} = \alpha_{AB} \quad (55)$$

という関係があることが知られている。これをトムソンの第 1 関係式という。

3.3 トムソン効果

では、温度差のあるところで電流を流すとどうなるだろうか。図 7 のように、導体として断面積 S の一様な棒で、ある断面 a と b に挟まれた部分を考えよう。今、電流は a から b へ流れていて、温度も a の方が b より高いとする。また、a と b の間の距離を Δx 、電位差を ΔV 、温度差を ΔT とする。そして、a 面と b 面を通してのエネルギーのやり取りを考える。

今、単位時間内に流れ込んだエネルギーを ΔQ とすると

$$\Delta Q = \Delta V I + (\Pi_a - \Pi_b) I \quad (56)$$

と表される。第 1 項は電氣的なエネルギーの流れで、第 2 項はペルチェ効果によるものである。また、電位の勾配は

$$\Delta V = \frac{\rho I}{S} \Delta x - \alpha \Delta T \quad (57)$$

で与えられる。ここで、 $\rho = 1/\sigma$ は抵抗率である。さらに、

$$\Pi_a - \Pi_b = \Pi(T + \Delta T) - \Pi(T) = \frac{d\Pi}{dT} \Delta T \quad (58)$$

である。よって、

$$\Delta Q = \frac{\rho I^2}{S} \Delta x + \left(\frac{d\Pi}{dT} - \alpha \right) \Delta T I \quad (59)$$

となる。このうち、電流の 2 乗に比例する項は普通のジュール熱を表しているが、それ以外に、 $I \Delta T$ に比例した項が存在する。これがトムソン効果と呼ばれる現象で、電流の向きと温度勾配の向きの関係で吸発熱が逆転するので、ジュール熱とは区別できる。そして、

$$\theta = \frac{d\Pi}{dT} - \alpha \quad (60)$$

をトムソン係数といい、この関係をトムソンの第 2 関係式という。

次に、図 8 のような回路作ったとしよう。回路中の電池は、熱起電力とは逆向きでわずかに異なる起電力を持つとする。こうすると、流れる電流は極めて小さいので、電流の 2 乗に比例するジュール熱の影響は無視できる。また、この回路で電池のする仕事は、ほとんど $(\alpha_B - \alpha_A) \Delta T I$ と等しいが、これは熱電気効果による外界へのエネルギーの放出分に等しい。よって、

$$(\alpha_B - \alpha_A) \Delta T I = \Pi_{BA}(T + \Delta T) I + \Pi_{AB}(T) I + (\theta_A - \theta_B) \Delta T I \quad (61)$$

でなければならない。この式は、

$$\theta_{AB} = \frac{d\Pi_{AB}}{dT} - \alpha_{AB} \quad (\theta_{AB} = \theta_A - \theta_B) \quad (62)$$

となり、トムソンの第 2 関係式と同等な式を与える。

ところで、この電流が一巡する過程は、電流の一次の効果で可逆変化、つまり、電流の向きを逆転させると元に戻すことができる過程である。したがって、一巡した時の熱のやり取りでのエントロピー変化は零である。すなわち、

$$\frac{\Pi_{BA}(T + \Delta T)}{T + \Delta T} + \frac{(\theta_A - \theta_B) \Delta T}{T} + \frac{\Pi_{AB}(T)}{T} = 0 \quad (63)$$

でなければならない (共通の係数となる I は省略した)。

$$\frac{\Pi_{BA}(T + \Delta T)}{T + \Delta T} = -\frac{\Pi_{AB}(T)}{T} - \frac{d\Pi_{AB}(T)}{dT} \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Pi_{AB}(T) \Delta T}{T^2} \quad (64)$$

を用いると、

$$\theta_{AB} = \frac{d\Pi_{AB}}{dT} - \frac{\Pi_{AB}}{T} \quad (65)$$

でなければならない。この関係と第 2 関係式を使うとトムソンの第 1 関係式が成立することが分かる。つまり、上記の考察でトムソンの 2 つの関係式が熱力学の関係式で証明されたことになる。ただし、この議論ではジュール熱や熱伝導などの不可逆な過程を考えていない。もし、不可逆過程が存在するとエントロピーは保存されないの以上記の議論は成り立たないが、トムソンの関係式は広く成り立つことが知られている。

補遺

A 最小発熱の原理

ある導体に電源をつなぎ、内部に電流を流す場合を考える。この時、電場と電流は

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi \quad (66)$$

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} \quad (67)$$

$$\text{div } \mathbf{i} = 0 \quad (68)$$

を満たすはずである。そして、導体全体での単位時間あたりの発熱量は

$$W = \int \mathbf{i} \cdot \mathbf{E} \, d\mathbf{r}^3 = \int \frac{\mathbf{i}^2}{\sigma} \, d\mathbf{r}^3 \quad (69)$$

で与えられる。そこで、仮想的に電流の分布をずらした場合を考えると

$$\delta W = \int \frac{(\mathbf{i} + \delta \mathbf{i})^2}{\sigma} \, d\mathbf{r}^3 - \int \frac{\mathbf{i}^2}{\sigma} \, d\mathbf{r}^3 = 2 \int \frac{\mathbf{i} \cdot \delta \mathbf{i}}{\sigma} \, d\mathbf{r}^3 + \int \frac{\delta \mathbf{i}^2}{\sigma} \, d\mathbf{r}^3 \quad (70)$$

の発熱量の変化が生じる。ここで、

$$\frac{\mathbf{i} \cdot \delta \mathbf{i}}{\sigma} = -\text{grad } \phi \cdot \delta \mathbf{i} = -\text{div}(\phi \delta \mathbf{i}) + \phi \text{div } \delta \mathbf{i} \quad (71)$$

である。ところで、電荷の保存則はいつも成り立つので、 $\text{div } \delta \mathbf{i} = 0$ である。したがって、

$$\int \frac{\mathbf{i} \cdot \delta \mathbf{i}}{\sigma} \, d\mathbf{r}^3 = - \int \text{div}(\phi \delta \mathbf{i}) \, d\mathbf{r}^3 = - \int \phi \delta i_n \, dS \quad (72)$$

となる。ここで、最後の項の表面で積分は導体表面での積分である。さらに、境界条件として表面での電流分布は外部の条件で決まるとすれば $\delta i_n = 0$ である。したがって、

$$\delta W = \int \frac{\delta \mathbf{i}^2}{\sigma} \, d\mathbf{r}^3 \geq 0 \quad (73)$$

である。すなわち、電流分布をずらすと発熱量が増大するのである。逆にいえば、実現される電流分布は、発生する熱量を最小にするように決まるといえる。これを最小発熱の原理という。

B 抵抗率テンソルと電気伝導度テンソル

ホール効果以外でも、媒質に違方性があると電流密度と電場は単純な比例関係ではなくなり、

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} & \rho_{yz} \\ \rho_{zx} & \rho_{zy} & \rho_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{pmatrix} \quad (74)$$

$$\begin{pmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (75)$$

と書くことができ、 ρ_{ij} を抵抗率テンソル、 σ_{ij} を電気伝導度テンソルという。磁場が存在しないときにはこれらのテンソルは対称テンソルになるが、磁場が存在すると

$$\sigma_{ij}(B) = \sigma_{ji}(-B), \quad \rho_{ij}(B) = \rho_{ji}(-B) \quad (76)$$

を満たすことが示されている。これは、磁場ベクトルが本当のベクトルではなく、擬ベクトル（空間反転に対して、符号を変えないベクトル）のため起きるのである。このような磁場の性質を用いて、回路中の信号や光の伝播に方向性を持たせることができる。

参考文献

- [1] 高橋秀俊：「電磁気学」(裳華房、1959年)。
- [2] 中山正敏：「物質の電磁気学」(岩波書店、1996年)。

問題

1. 50Hzの振動電磁場に対する表皮の厚さを、代表的な金属(銅、アルミニウム、鉄)について計算せよ。
2. 直径1mmの銅線に1MHzの振動電流を流すと、電気抵抗の値は直流の場合に比べておよそ何倍になるか。振動電流は厚さ δ の円筒部分のみに流れると仮定して、計算を行えばよい。
3. 式(37)に $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ を代入すると

$$\mathbf{A} + \frac{m}{nq^2} \mathbf{i} = \text{grad } f \quad (77)$$

である。穴のあいた超伝導体に対しては、磁場が通ることができる。このとき、超伝導体を貫く磁束 Φ は

$$\Phi = \oint \text{grad } f \cdot d\mathbf{s} \quad (78)$$

となることを示せ。周回積分の経路は超伝導体の内部に十分入り、電流が流れていない領域にあるとする。なぜ、右辺は0にならないか考えよ。

4. 一様な磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ 中に半径 a の超伝導体を置いた時の磁場を計算せよ。
5. 温度計測に用いられる熱電対の代表的なものについて、その特性を調べよ。
6. 式(55)と式(60)から Π を消去して、ゼーベック係数をトムソン係数の関数として表せ。