『電磁気学第２』講義資料 No.1

【マックスウェル方程式】

1　マックスウェルの方程式

電磁場の振る舞いを決めるマックスウェルの方程式は、MKSA 単位系では

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\mathbf{B} &= 0 && (1)\\ \mathrm{div}\,\mathbf{D} &= \rho && (2)\\ \mathrm{rot}\,\mathbf{H} &= \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} && (3)\\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && (4) \end{aligned}$$

で表される。それぞれ

1. 磁気単極が存在しない
2. ガウスの法則
3. （拡張された）アンペールの法則
4. ファラデーの電磁誘導の法則

という物理法則に対応している。また、$\mathbf{E}$ と $\mathbf{D}$、$\mathbf{H}$ と $\mathbf{B}$ の間には

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} && (5)\\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} && (6) \end{aligned}$$

という関係があり、分極 $\mathbf{P}$ 及び磁化 $\mathbf{M}$ は物質と電磁場の相互作用で決まる。一番簡単な、一様で線形な媒質では、

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} && (7)\\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu}\mathbf{B} && (8) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、式 (6) には注意が必要である。教科書によっては

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}' \tag{9}$$

という定義を採用している場合がある。式 (6) のような考え方は、電場と磁場の対応を考える時 $\mathbf{E}-\mathbf{B}$、$\mathbf{D}-\mathbf{H}$ という対応で考える。これを $\mathbf{E}-\mathbf{B}$ 対応という。また、式 (9) の考え方では $\mathbf{E}-\mathbf{H}$、$\mathbf{D}-\mathbf{B}$ の対応を考えているので、$\mathbf{E}-\mathbf{H}$ 対応と呼ばれている。この違いは形式的なものである。そして、$\mathbf{M}$ と $\mathbf{M}'$ については異なる物理量を表していて $\mathbf{M}' = \mu_0 \mathbf{M}$ である。しかし、同じ磁化と呼ばれている場合があり、混同しやすい。本講義では $\mathbf{E}-\mathbf{B}$ 対応を用いる。また、

$$\mathrm{div}\,\mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{10}$$

という電荷の保存則が成り立つ。

2　微分形式と積分形式

ガウスの定理を使うと式 (1) と式 (2) は

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{B} \, \mathrm{d}V = \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \tag{11}$$

や

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{D} \, \mathrm{d}V = \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\mathcal{V}} \rho \, \mathrm{d}V = Q \tag{12}$$

となり、表面積分の値と内部の物理量の総和が関係づけられる。磁場に関しては、結局、磁気単極というものが存在しないということを表し、電場に関しては、電荷 Q からは Q 本の電気力線が出ていて、電荷の無いところでは電気力線は連続であるという物理法則に帰着される。式 (10) に関しては

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{i} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{13}$$

となり、ある領域から流れ出す電流の総和が、内部の電荷の変化率に等しいという式になる。さらに、式 (3) に関しては、ストークスの定理を用いて、

$$\int_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathrm{s} = \int_{\mathcal{S}} \left(\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = I \tag{14}$$

のように、ある閉曲線にそって、磁場の接線成分を積分すると内部を貫く電流に等しいというアンペールの法則になる。ここで、変位電流の寄与が含まれていることに注意する。また、この変位電流を含めないと電荷の保存則が成り立たないことを思い出して欲しい。式 (4) は、やはりストークスの定理を使うと、

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathrm{s} = -\int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{15}$$

となる。この式の左辺は回路の起電力に相当し、これが、回路の内部を貫く磁束の時間変化に等しいという電磁誘導の法則になる。このように、積分された形の関係式はより直感的な表現を持つ。もちろん、具体的な計算を行う場合、つまり、各点の電場や磁場の値を求める場合には、微分方程式を解く必要がある。しかし、微分方程式の解を得るためには境界条件が必要であり、この時には積分形の法則が有効になる。微分形で書かれた法則を考える場合、積分形に直した場合の物理表現を常に考えておく必要がある。

3　幾つかの簡単な例

簡単な例を考えることにする。

3.1　静的な場

すべての場が静的、つまり時間変化しないとすると電場と磁場の方程式は完全に分離してしまう。つまり、電場は

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \tag{16}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \tag{17}$$

の二つの方程式で決まる。式 (17) から、

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi \tag{18}$$

と書き表すことができる。この ϕ は静電ポテンシャルと呼ばれる。真空中を仮定すると $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}$ なので、

$$\Delta\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{19}$$

というポアッソン方程式が得られる。静的な電場に関してはこれを解けば良い。球対称な場合、$r\neq 0$ では

$$\Delta\phi=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(r\phi) \tag{20}$$

である。原点に点電荷 Q をおくと、$r\neq 0$ では $\rho=0$ だから、解は

$$\phi=\frac{a}{r}+b \tag{21}$$

で与えられ、$r\to\infty$ で $\phi\to 0$ という境界条件では $b=0$ である。さらに、式 (12) を用いると

$$\varepsilon_0\frac{a}{r^2}4\pi r^2=Q \tag{22}$$

から、$a=Q/(4\pi\varepsilon_0)$ となる。よって、点電荷の作る静電ポテンシャルは

$$\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \tag{23}$$

で与えられる。これはクーロンの法則である。もし、電荷が分布していれば、

$$\phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{24}$$

のように解を表現できる。これが、式 (19) の解となっている。

3.2 静磁場

次に、磁場について考える。この場合、式 (1) より、

$$\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A} \tag{25}$$

というベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を導入することができる。この式を、式 (3) に代入すると、

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=\mu_0\mathbf{i} \tag{26}$$

である。そして、rot rot = grad div $-\Delta$ という公式[1]を用いると

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}=\mu_0\mathbf{i} \tag{27}$$

となる。ところで、式 (25) を満たす $\mathbf{A}$ には、$\operatorname{rot}\mathbf{a}=0$ を満たすベクトルを付け加えることができるので任意性がある。そこで、$\operatorname{div}\mathbf{A}=0$ を満たすように $\mathbf{A}$ を決めると

$$\Delta\mathbf{A}=-\mu_0\mathbf{i} \tag{28}$$

である。これは、ベクトルポテンシャルの各成分がポアッソン方程式を満たしていることを表している。したがって、この解は

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{29}$$

[1]直交座標でしか成り立たない

で与えられる。この式から磁場を計算すると、

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\times \mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{30}$$

となり、電流密度が回路電流のような場合には、

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{I}{4\pi}\int \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\times \mathrm{d}\mathbf{s}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \tag{31}$$

とである。これは、電流素片 $I\mathrm{d}s'$ が作る磁場が

$$\mathrm{d}H = \frac{I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}s'\sin\theta}{R^2} \tag{32}$$

で与えられるいうビオサバールの法則を表している。ここで、θ は電流素片と $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ のなす角で $R=|\mathbf{R}|$ である。このようにして、方程式を数学的に解くことで物理法則が再現される。

4　ポテンシャル

それでは、電磁場が時間変化している一般的な場合を考える。この場合も、式 (25) は成り立つ。これを式 (4) に代入すると

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\,\mathrm{grad}\,\phi \tag{33}$$

という形で、スカラーポテンシャル ϕ を導入できる。この ϕ は静的な場では静電ポテンシャルと同じであるが、時間変化がある場合には一致しない（単純に $\mathrm{grad}\,\phi$ が電場を与えない）ことを注意しておくべきである。

このベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを与えれば、電磁場が決まる。しかし、ポテンシャルに対して任意のスカラー関数 χ を用いて

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathrm{grad}\,\chi \tag{34}$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{35}$$

という変換を施しても、$\mathbf{E}$ や $\mathbf{B}$ は不変に保たれる。この変換をポテンシャルのゲージ変換という。測定可能な物理量はゲージ変換に対して不変な量でなければならない。ポテンシャルの式を式 (2)、(3) に代入すると

$$-\Delta\phi - \frac{\partial\,\mathrm{div}\,\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\rho - \mathrm{div}\,\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \tag{36}$$

$$-\Delta\mathbf{A} + \mathrm{grad}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{A}\right) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0\left(\mathbf{i} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\mathbf{M}\right) \tag{37}$$

が得られる。そして、ゲージ変換を用いて

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0 \tag{38}$$

とできる（これをローレンツゲージという）。この条件のもとで、更に、物質の影響を考えない（$\mathbf{P}=0, \mathbf{M}=0$）とすると、

$$\Box\,\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{39}$$

$$\Box\,\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{i} \tag{40}$$

ここで、

$$\Box = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \quad \left(c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\right) \tag{41}$$

はダランベール演算子と呼ばれて、c を伝播速度とする波動方程式を表し、電荷密度、電流密度がその源になっている。また、別のゲージを採用する場合もある。例えば、

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}_\mathrm{c} = 0 \tag{42}$$

となるように決める。この場合、スカラーポテンシャルの満たす方程式が

$$\Delta\phi_\mathrm{c} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{43}$$

と、静的な場合とまったく同じになる。このためクーロンゲージと呼ばれている。電場は、式 (33) によって計算するが

$$\mathbf{E}_\mathrm{L} = -\,\mathrm{grad}\,\phi_\mathrm{c} \tag{44}$$

$$\mathbf{E}_\mathrm{T} = -\frac{\partial\mathbf{A}_\mathrm{c}}{\partial t} \tag{45}$$

とすると、

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_\mathrm{L} = 0 \tag{46}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E}_\mathrm{T} = 0 \tag{47}$$

を満たすため、電場の縦成分と横成分と呼ばれる（磁場は横成分しか存在しない）。また、ベクトルポテンシャルの満たす方程式は

$$\Box\,\mathbf{A}_\mathrm{c} = -\mu_0\mathbf{i}_\mathrm{T} \tag{48}$$

で与えられる。ここで、$\mathbf{i}_\mathrm{T}$ は

$$\mathbf{i}_\mathrm{T} = \mathbf{i} + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}_\mathrm{L}}{\partial t} \tag{49}$$

で定義される電流の横成分である。電磁場の量子化を議論する場合には、クーロンゲージが用いられることが多い。

5 電磁波

波動方程式は、その名の通り波動現象を表す方程式である。電磁気学における波動は電磁波と呼ばれている。電磁波は、その振動数により電波、光、X 線、γ 線などという名前で呼ばれている。この性質を調べてみる。真空中で $\rho = 0$、$\mathbf{i} = 0$ の時を考えよう。このような場合は、$\phi = 0$ としてよい。さらに、平面波を考える。つまり、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 \exp\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t) \tag{50}$$

とする。この時、波動方程式の解となるためには $\mathbf{k}^2 = \omega^2/c^2$ を満たす必要があり、$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$ という条件から $\mathbf{A}_0\cdot\mathbf{k} = 0$ でなければばならないので、$\mathbf{A}$ は確かに横波である。また、電場や磁場は

$$\mathbf{E} = \mathrm{i}\omega\mathbf{A}_0 \exp\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t) \tag{51}$$

$$\mathbf{B} = \mathrm{i}\mathbf{k}\times\mathbf{A}_0 \exp\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t) \tag{52}$$

となるから、$\mathbf{E}\cdot\mathbf{k} = 0$、$\mathbf{B}\cdot\mathbf{k} = 0$ と横波になる。さらに、$\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0$ から、電場と磁場と波数ベクトルがすべて直交していることがわかる。ρ や $\mathbf{i}$ を与えて、どのような電磁波が発生するかは、式 (39) や式 (40) の波動方程式の解を求めないといけない。

6　電磁波の偏波（偏光）

平面電磁波を考えると、その波数ベクトルの垂直なベクトルが電磁波の振幅を表すが、独立なベクトルは 2 つ存在するので電磁波には 2 つの自由度あることがわかり、その状態を偏波（光を扱う場合が多いので偏光という方が多い）という言葉で表す。

電磁波とし、z 方向に進む単色平面波を考えると電場ベクトルは

$$E_x = a_x \cos(\omega t - kz + \phi_x) \tag{53}$$

$$E_y = a_y \cos(\omega t - kz + \phi_y) \tag{54}$$

$$E_z = 0 \tag{55}$$

と表される。また、$\mathbf{B} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}/\omega$ である。ここに表れる、振幅 a_x、a_y、周波数 ω、波数 k、位相 ϕ_x、ϕ_y などが与えられると電磁波の性質が決まる。

式 (53) と式 (54) から $\omega t - kz$ を消去すると

$$(E_x/a_x)^2 + (E_y/a_y)^2 - 2(E_x/a_x)(E_y/a_y)\cos\delta = \sin^2\delta \quad (\delta = \phi_y - \phi_x) \tag{56}$$

となる。この式は一般には楕円を表し、楕円偏光と呼ばれている。もし、$\delta = 0, \pm\pi$ の時は直線になるので直線偏光、$\delta = \pm\pi/2$ で、$a_x = a_y$ の場合は円になるので、円偏光という。また、楕円偏光（円偏光も含む）の場合、z の正の方向（波の進行方向）から眺めた時に、$0 < \delta < \pi$ の時は、z が一定の平面内で考えると電場ベクトルは右回りに回転し、$-\pi < \delta < 0$ の時は、左回りに回転する。そこで、それぞれ右回り楕円偏光、左回り楕円偏光という。

これらの偏光は、独立な偏光状態の重ね合わせで表現できる。実際、式 (53) と式 (54) は、任意の偏光状態が直交する 2 つの直線偏光の光の和で表せることを示している。

7　電磁場のエネルギーと運動量

電磁場は、エネルギーと運動量を持っている。マックスウェル方程式を用いると電磁場のエネルギー密度

$$u = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2) \tag{57}$$

とポインティングベクトル

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{58}$$

は、真空中で

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{S} = 0 \tag{59}$$

を満たす。ここから、ポインティングベクトルは電磁場のエネルギーの流れを表していると考えられる。また、運動量密度ベクトル $\mathbf{G} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \mathbf{S}/c^2$ とマックスウェルの応力テンソル[2]

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_0 E_i E_j + \mu_0 H_i H_j - \delta_{ij} u \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{60}$$

は

$$\frac{\partial G_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} \tag{61}$$

という関係式を満たす。この関係から、電磁場は運動量も運ぶ。荷電粒子や物質場が存在する場合には、電磁場とこれらが相互作用し、エネルギーや運動量をやりとりするが、全体を考えると保存する。

[2] この符号は教科書によって異なる。また、$i, j = 1, 2, 3$ は x, y, z を表す。

補遺

A　ガウスの定理とストークスの定理

ガウスの定理は

$$\int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\mathbf{X}\,\mathrm{d}V = \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{X}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{62}$$

と表される。ここで、$\mathcal{V}$ はある体積部分で、$\partial\mathcal{V}$ はその部分の表面を表す閉曲面である。すなわち、あるベクトル場の発散の体積積分は表面積分に置き換えられることを示している。また、ストークスの定理は

$$\int_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}\,\mathbf{X}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{X}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} \tag{63}$$

と表される。ここで、$\mathcal{S}$ はある曲面で、$\partial\mathcal{S}$ はその周囲を表す閉曲線である。つまり、あるベクトル場の回転の面積分は、線積分に置き換えられることを意味している。ただし、この定理が成り立つためには、ベクトル場や境界を構成する曲面、曲線には適当な条件が必要である。

この 2 つの定理は、特殊な微分形式の積分が一つ次元の低い境界での積分に置き換えられることを意味していて、微積分学の基本定理

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{64}$$

を拡張したものと考えることができる。

参考文献

[1] 平川浩正：「電気力学」（培風館、1973 年）.

[2] 高橋康：「電磁気学再入門」（講談社、1994 年）.

問題

1. 球座標、円柱座標でラプラス演算子を書き下せ。

2. $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ を与えるようなベクトルポテンシャルを求めよ。

3. ある閉曲線の内部を貫く磁束は、$\Phi = \oint \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}$ とベクトルポテンシャルで表せることを示し、この量がゲージ変換で不変であることを示せ。

4. 式 (51) と式 (52) から、$|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$ となることを示せ。また、$|\mathbf{E}| = Z_0|\mathbf{H}|$ とした時、Z_0 の次元と値を求めよ。

5. 式 (59) と式 (61) を証明せよ。

6. 平面電磁波の場合、$|\mathbf{S}| = cu$ という関係が成り立つことを示せ。

7. $+z$ 方向に進む左回り円偏光の平面波を直線偏光の重ねあわせで表現せよ。

8. ポテンシャルが $\phi = 0$、$\mathbf{A} = (a\cos\omega t\cos kz,\, a\cos\omega t\sin kz,\, 0)$、$k = \omega/c$ で表されるとき、電場と磁場を計算し、その性質を論ぜよ。