『電磁気学第２』講義概要 No.1【マックスウェル方程式】

1　マックスウェルの方程式

MKSA 単位系、電場 $\mathbf{E}$、電束密度 $\mathbf{D}$、磁場 $\mathbf{H}$、磁束密度 $\mathbf{B}$、電流密度 $\mathbf{i}$、電荷密度 ρ

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4}$$

分極 $\mathbf{P}$、磁化 $\mathbf{M}$、真空誘電率 ε_0、真空透磁率 μ_0

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{5}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} \tag{6}$$

線形媒質、誘電率 ε、透磁率 μ

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \tag{7}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} \tag{8}$$

電荷の保存則

$$\operatorname{div}\mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{9}$$

2　簡単な場合

2.1　静電場

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho \tag{10}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \tag{11}$$

静電ポテンシャル

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi \tag{12}$$

ポアソン方程式

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{13}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{14}$$

2.2　静磁場

ベクトルポテンシャル

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} \tag{15}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{i} \tag{16}$$

$\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta$(直交座標)

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{i} \tag{17}$$

$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{i} \tag{18}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{19}$$

ビオサバールの法則

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\times\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{20}$$

3　ポテンシャル

スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{21}$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} \tag{22}$$

ゲージ変換

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad}\chi \tag{23}$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{24}$$

マックスウエル方程式

$$-\Delta\phi - \frac{\partial \operatorname{div}\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\rho - \operatorname{div}\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}-\Delta\mathbf{A} &+ \operatorname{grad}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A}\right)\\ &+ \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\\ &= \mu_0\left(\mathbf{i} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{M}\right)\end{aligned} \tag{26}$$

ローレンツゲージ

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A} = 0 \tag{27}$$

$\mathbf{P}=0, \mathbf{M}$=0

$$\begin{aligned} \Box\,\phi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (28)\\ \Box\,\mathbf{A} &= -\mu_0\mathbf{i} \quad (29)\end{aligned}$$

波動演算子

$$\Box = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \quad (30)$$

光速度

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 2.99792458\times 10^8\ \mathrm{m/s} \quad (31)$$

クーロンゲージ

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}_\mathrm{c} = 0 \quad (32)$$

$\mathbf{P}=0, \mathbf{M}$=0

$$\Delta\phi_\mathrm{c} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\mathrm{L} &= -\,\mathrm{grad}\,\phi_\mathrm{c} \quad (34)\\ \mathbf{E}_\mathrm{T} &= -\frac{\partial \mathbf{A}_\mathrm{c}}{\partial t} \quad (35)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\mathbf{E}_\mathrm{L} &= 0 \quad (36)\\ \mathrm{div}\,\mathbf{E}_\mathrm{T} &= 0 \quad (37)\end{aligned}$$

$$\Box\,\mathbf{A}_\mathrm{c} = -\mu_0\mathbf{i}_\mathrm{T} \quad (38)$$

$$\mathbf{i}_\mathrm{T} = \mathbf{i} + \varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}_\mathrm{L}}{\partial t} \quad (39)$$

4 電磁波

平面波

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}_0 \exp\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)\ (\mathbf{k}^2 = \omega^2/c^2) \quad (40)$$

横波 $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0 \rightarrow \mathbf{A}_0\cdot\mathbf{k} = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathrm{i}\omega\mathbf{A}_0\exp\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t) \quad (41)\\ \mathbf{B} &= \mathrm{i}\mathbf{k}\times\mathbf{A}_0\exp\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t) \quad (42)\end{aligned}$$

5 電磁場のエネルギーと運動量

電磁場のエネルギー密度

$$u = \frac{1}{2}(\varepsilon_0\mathbf{E}^2 + \mu_0\mathbf{H}^2) \quad (43)$$

ポインティングベクトル

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \quad (44)$$

エネルギーの保存則、真空中 ($\mathbf{i}$=0)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{S} = 0 \quad (45)$$

マックスウエル応力テンソル

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_0 E_i E_j + \mu_0 H_i H_j - \delta_{ij}u \quad (46)$$

運動量密度ベクトル

$$\mathbf{G} = \mathbf{D}\times\mathbf{B} = \mathbf{S}/c^2 \quad (47)$$

運動量保存則、真空中 ($\rho = 0$、$\mathbf{i}$=0)

$$\frac{\partial G_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x^j} \quad (48)$$

問題

1. 球座標、円柱座標でラプラス演算子を書き下せ。
2. $\mathbf{B} = (0,0,B)$ を与えるようなベクトルポテンシャルを求めよ。
3. ある閉曲線の内部を貫く磁束は、$\Phi = \oint \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}$ とベクトルポテンシャルで表せることを示し、この量がゲージ変換で不変であることを示せ。
4. 式 (41) と式 (42) から、$|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$ となることを示せ。また、$|\mathbf{E}| = Z_0|\mathbf{H}|$ とした時、Z_0 の次元と値を求めよ。
5. 式 (45) と式 (48) を証明せよ。
6. 平面電磁波の場合、$|\mathbf{S}| = cu$ という関係が成り立つことを示せ。
7. ポテンシャルが

$$\begin{aligned} \phi &= 0 \quad (49)\\ A_x &= a\cos\omega t\cos kz \quad (50)\\ A_y &= a\cos\omega t\sin kz \quad (51)\\ A_z &= 0 \quad (52)\\ k &= \omega/c \quad (53)\end{aligned}$$

   で表されるとき、電場と磁場を計算し、その性質を論ぜよ。