『電磁気学第２』講義概要 No.6【磁性体】

1　磁性体と磁化

誘電体：分極 $\mathbf{P}$ 磁性体：磁化 $\mathbf{M}$ 電荷に相当する磁荷というものは存在しない誘電体の分極：電荷分布の変化磁気：電流の作る磁気モーメント

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int [\mathbf{r} \times \mathbf{i}(\mathbf{r})] \mathrm{d}^3\mathbf{r} \tag{1}$$

磁化の定義（N は単位体積あたりの磁気モーメントの数）

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\Delta V}\sum \mathbf{m}_i = N\overline{\mathbf{m}} \tag{2}$$

磁気モーメントの作るベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_\mathrm{m} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\sum \frac{\mathbf{m}_i \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\mathrm{d}^3\mathbf{r}'\end{aligned} \tag{4}$$

x 成分

$$\begin{aligned}&\frac{M_y(\mathbf{r}')(z-z') - M_z(\mathbf{r}')(y-y')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \\ &= M_y(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial z'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - M_z(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{M_y(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) - \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{M_z(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \\ &+ \frac{(\operatorname{rot}\mathbf{M})_x}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\end{aligned} \tag{5}$$

全空間で積分：はじめの 2 つの項は表面積分 $\rightarrow$ 十分遠方で 0

$$\mathbf{A}_\mathrm{m} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\operatorname{rot}\mathbf{M}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{6}$$

磁化電流（磁化を表す等価的な電流）

$$\mathbf{i}_\mathrm{m} = \operatorname{rot}\mathbf{M} \tag{7}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{i}+\mathbf{i}_\mathrm{m}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{8}$$

磁場に対するガウスの法則

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \mu_0(\operatorname{div}\mathbf{H} + \operatorname{div}\mathbf{M}) = 0 \tag{9}$$

分極磁荷

$$\mu_0 \operatorname{div}\mathbf{M} = -\rho_\mathrm{m} \tag{10}$$

磁性体の作る磁場の原因

- 磁荷の存在を仮定：誘電体との類推
- 電流のつくる磁気モーメント：反磁性
- スピン磁気モーメントを円電流と考えることは困難

磁性体のみの磁場（真電流が流れていない）

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0 \tag{11}$$

磁位[1]

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\phi_\mathrm{m} \tag{12}$$

$$\Delta\phi_\mathrm{m} = -\frac{\rho_\mathrm{m}}{\mu_0} \tag{13}$$

1 個の磁気モーメントが作る磁位

$$\phi_\mathrm{m} = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}}{r^3} \tag{14}$$

磁性体に対する境界条件（表面電流が存在しない）

$$H_{1\mathrm{t}} = H_{2\mathrm{t}} \tag{15}$$

$$B_{1\mathrm{n}} = B_{2\mathrm{n}} \tag{16}$$

磁気感受率 χ_m

$$\mathbf{M} = \chi_\mathrm{m}\frac{\mathbf{H}}{\mu_0} \tag{17}$$

透磁率 μ

$$\mathbf{B} = (\mu_0 + \chi_\mathrm{m})\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \tag{18}$$

常磁性体:$\chi_\mathrm{m} > 0$、反磁性体：$\chi_\mathrm{m} < 0$
磁気モーメント間の相互作用：磁気秩序状態（強磁性体、反強磁性体）

[1]電流の作る場に対しても磁位を考えることは可能だが、多価関数になるので注意が必要である。

2　荷電粒子の作る磁気モーメントと常磁性、反磁性

荷電粒子の円運動（$x-y$ 面内、電荷 q、半径 a、速さ v）$\rightarrow$ 磁気モーメント

$$m_z = \pi a^2 I = \pi a^2 \frac{q}{2\pi a/v} = \frac{avq}{2} \tag{19}$$

角運動量 $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = mva\mathbf{e}_z \tag{20}$$

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2m}\mathbf{L} \tag{21}$$

磁気モーメントと外部磁束密度 $\mathbf{B}$ の間ポテンシャル

$$U = -\mathbf{m}\cdot\mathbf{B} \tag{22}$$

量子力学（軌道角運動量：$\mathbf{l}$、スピン：$\mathbf{s}$）[2]

$$\mathbf{m} = \frac{q\hbar}{2m}(\mathbf{l} + g\mathbf{s}) \tag{23}$$

g：ランデ因子[3]

円運動中の粒子 $\rightarrow$ 外部磁場を印加 $\rightarrow$ 磁場の変化による電磁誘導 $\rightarrow$ 円運動の状態が変化発生する電場

$$E = -\frac{1}{2\pi a}\frac{\mathrm{d}(\pi a^2 B)}{\mathrm{d}t} = -\frac{a}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \tag{24}$$

粒子の接線方向の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{aq}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \tag{25}$$

磁場：$0 \rightarrow B$、速さの変化 Δv

$$\Delta v = -\frac{aqB}{2m} \tag{26}$$

磁気モーメントの変化量

$$\Delta m_z = -\frac{a^2 q^2 B}{4m} \tag{27}$$

必ず負：反磁性の原因

自由な荷電粒子：磁場中の円運動（サイクロトロン運動）

$$m\frac{v^2}{a} = qvB \tag{28}$$

磁気モーメント

$$\mathbf{m} = -\frac{mv^2}{2B^2}\mathbf{B} \tag{29}$$

磁場と逆方向 $\rightarrow$ 反磁性

実際の物質：χ_m/μ_0 の値は非常に小さい（$|\chi_\mathrm{m}/\mu_0| < 10^{-3}$。

[2]量子力学ではこれらの量は演算子によって表現され、単純な数ではない。

[3]電子の場合にはほぼ 2 である。

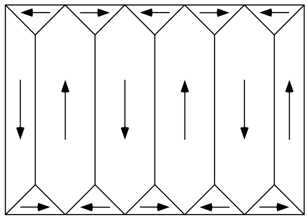

図 1: 磁区の例

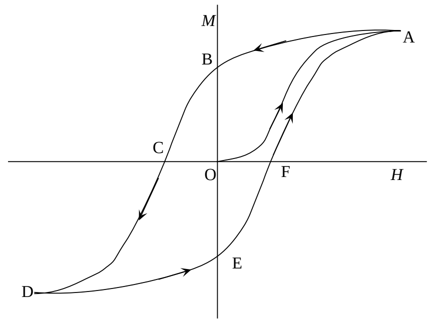

図 2: 磁化曲線

3　強磁性

磁気モーメント間相互作用 $\rightarrow$ ある温度（キュリー温度と呼ばれる）以下で自発磁化 $\rightarrow$ 強磁性体：

- 磁場と磁化は比例しない
- 等価的な χ_m/μ_0 は非常に大きな値
- 分域構造（磁区、図 1）
- 磁化曲線と履歴現象（図 2）

ヒステリシス損

$$W = \mu_0 \oint H\mathrm{d}M \tag{30}$$

永久磁石：M_r や H_c が大きな材料：硬い材料 $M_\mathrm{r}H_\mathrm{c}$ を磁石材料の性能指数トランスの鉄心：鉄損（式 (30) による損失）の小さな材料：柔らかい材料

問題

1. 半径 a、透磁率 μ の常磁性体の球に一様な磁場をかけた時の磁場を求めよ。