

【磁性体】

1 磁性体と磁化

誘電体の性質が分極 P で表されたのに対応して、磁性体の性質は磁化 M によって表される。ただ、磁性の場合には、電荷に相当する磁荷というものは存在しないので注意が必要である。誘電体の分極は電荷分布の変化によってミクロな電気双極子モーメントが生じ、単位体積あたりの双極子モーメント平均として分極ベクトルが定義された。磁気の場合には、電気双極子モーメントに相当するものとして電流の作る磁気モーメント、

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{i}(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r} \quad (1)$$

があるので、同様に物質中に生じる磁気モーメントを用いて、磁化ベクトルを定義する。すなわち、

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum \mathbf{m}_i = N \bar{\mathbf{m}} \quad (2)$$

となる。ここで、 N は単位体積あたりの磁気モーメントの数である。そこで、この磁気モーメントの作る磁場を計算してみると、磁気モーメントの作るベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (3)$$

であるから、これを重ね合わせて、

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum \frac{\mathbf{m}_i \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \quad (4)$$

とかける。ところで、この式の被積分関数の x 成分を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{M_y(\mathbf{r}')(z - z') - M_z(\mathbf{r}')(y - y')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} &= M_y(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - M_z(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{M_y(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{M_z(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) + \frac{(\text{rot } \mathbf{M})_x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (5)$$

となる。全空間で積分すると、はじめの2つの項は部分積分して表面の値に置き換わり、十分遠方を考えると消えるので、

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\text{rot } \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (6)$$

となる。そこで、

$$\mathbf{i}_m = \text{rot } \mathbf{M} \quad (7)$$

という等価的な電流を考えると、真電流の寄与も合わせて

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i} + \mathbf{i}_m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (8)$$

という形で磁場が決まる。実際に、式 (7) で表される電流の作る磁気モーメントは

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{i}_m(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \times \text{rot } \mathbf{M}(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r} \quad (9)$$

であるが、被積分関数の x 成分を考えると

$$y \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) - z \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) = \frac{\partial(yM_y - zM_z)}{\partial x} - \frac{\partial(yM_x)}{\partial y} - \frac{\partial(zM_x)}{\partial z} + 2M_x \quad (10)$$

となり、右辺の最初の 3 つの項は部分積分により 0 となる。したがって、

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (11)$$

となり、本来の \mathbf{M} の定義と無矛盾である。また、アンペールの法則は

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{i} + \mathbf{i}_m) \quad (12)$$

となるが、

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (13)$$

で定義すると、

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} - \text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{i} \quad (14)$$

となり、磁性体の影響を表す電流の寄与が消える。このように、磁性体では磁場を作る等価電流が物質中に存在して、物質中の磁場の様子を定めると考えることができる。このようなミクロな電流は分子電流とか磁化電流と呼ばれており、誘電体における分極電荷に相当するものと考えられる。

また、磁場に対するガウスの法則を考えると

$$\text{div } \mathbf{B} = \mu_0(\text{div } \mathbf{H} + \text{div } \mathbf{M}) = 0 \quad (15)$$

である。そこで、

$$\mu_0 \text{div } \mathbf{M} = -\rho_m \quad (16)$$

で分極磁荷を定義すれば、誘電体の分極電荷と同じように考えることができる。この分極磁荷を用いて磁性体全体の磁気モーメントを定義すると

$$\frac{1}{\mu_0} \int \mathbf{r} \rho_m(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = - \int \mathbf{r} \text{div } \mathbf{M}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \int \mathbf{M}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (17)$$

となり式 (11) と一致する¹。したがって、分極磁荷による定義と磁化電流による定義は同等であることがわかる。これは磁性体の作る磁場の原因をどのように考えるかという問題と関係している。磁荷の存在を仮定して議論すると、誘電体との類推がしやすい。しかし、反磁性のようなものを考えるときは電流のつくる磁気モーメントという描像のほうが受け入れやすい。ただ、素粒子固有のスピンのもつ磁気モーメントを円電流と考えることはかなり困難であると思われる。

また、真電流が流れていないときには

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0 \quad (18)$$

なので、

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \phi_m \quad (19)$$

と磁位を考えることができる。そして、

$$\Delta \phi_m = -\frac{\rho_m}{\mu_0} \quad (20)$$

が得られる。たとえば、1 個の磁気モーメントが作る磁位は

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (21)$$

¹この計算でも部分積分を行う。

となる。また、電流の作る場に対しても磁位を考えることは可能だが、多価関数になるので注意が必要である。

また、磁性体に対する境界条件は、表面電流が存在しないときには、誘電体と同様な計算で

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (22)$$

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (23)$$

である。このとき、磁化によって生じる表面電流は考えなくてよい。

磁性体でも、磁化と磁場が比例するような物質が存在し、

$$\mathbf{M} = \chi_m \frac{\mathbf{H}}{\mu_0} \quad (24)$$

となる。 χ_m は磁気感受率と呼ばれる。また、

$$\mathbf{B} = (\mu_0 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \quad (25)$$

となって、 μ は透磁率と呼ばれる。このように磁場と磁化が比例する物質を常磁性体という。しかし、誘電体の場合とは異なり、磁性体の場合には χ_m が負になる物質が存在し、反磁性体という。実際、かなりの物質は反磁性を示すことが知られている。

また、外部磁場が存在しない場合にも磁化が存在する強磁性体や内部では磁気モーメントの分布に秩序状態が存在するが全体として磁化が存在しない反強磁性体というものも存在する。これは磁気モーメントの間に働く相互作用の性質による。

2 荷電粒子の作る磁気モーメントと常磁性、反磁性

電荷 q を持つ荷電粒子が半径 a の円軌道を速さ v で運動しているとする。このとき、実効的に円電流が流れ、磁気モーメントが発生する。円運動が $x-y$ 面内であるとすると、磁気モーメントは z 成分をもち、

$$m_z = \pi a^2 I = \pi a^2 \frac{q}{2\pi a/v} = \frac{avq}{2} \quad (26)$$

である。ここで v は $+z$ の方向から眺めて、左回りを正とする。また、この運動では粒子は角運動量 \mathbf{L} を持ち、

$$\mathbf{L} = mvae_z \quad (27)$$

したがって、

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2m}\mathbf{L} \quad (28)$$

という関係が成り立つ。この状態で磁場を加える。磁気モーメントと磁束密度 \mathbf{B} の間には

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (29)$$

というポテンシャルで表される相互作用があるので、磁束密度の方向と磁気モーメントの方向が一致するほうがエネルギーが低く、全体として一方向に磁気モーメントの向きがそろい磁化が発生する。もし、磁気モーメント間に相互作用がない場合には、常磁性として働く²。

量子力学では、角運動量を \hbar を単位にして表現し ($\mathbf{L} = \hbar\mathbf{l}$)、さらにスピン (s) という粒子固有の角運動量が登場するので、

$$\mathbf{m} = \frac{q\hbar}{2m}(\mathbf{l} + g\mathbf{s}) \quad (30)$$

²金属中の電子が強く縮退している場合は、状態密度の変化が強く作用し、パウリの常磁性と呼ばれる性質を示す。

という関係で書かれる³。ここで、 g はランデ因子とよばれ、スピン角運動量がどのくらい磁気モーメントを持つかの係数である。電子の場合にはほぼ 2 である。

ところで、円運動している粒子に外部から磁場を加えると磁場の変化に応じて電磁誘導によって電場が発生し、円運動の状態が変化する。発生する電場の大きさは、

$$E = -\frac{1}{2\pi a} \frac{d(\pi a^2 B)}{dt} = -\frac{a}{2} \frac{dB}{dt} \quad (31)$$

である。したがって、粒子が受ける接線方向の力を考えて運動方程式を立てると

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{aq}{2} \frac{dB}{dt} \quad (32)$$

となる。磁場が 0 から B に変化するまでに、速さが Δv 変化したとすると

$$\Delta v = -\frac{aqB}{2m} \quad (33)$$

である。したがって、磁気モーメントの変化量は

$$\Delta m_z = -\frac{a^2 q^2 B}{4m} \quad (34)$$

と必ず負になる。この効果は反磁性の原因となる。

まったく自由な荷電粒子を磁場中で運動させると円運動（サイクロトロン運動）を行うが、

$$m \frac{v^2}{a} = qvB \quad (35)$$

をみだし、磁気モーメントは、運動の方向を考えると

$$\mathbf{m} = -\frac{mv^2}{2B^2} \mathbf{B} \quad (36)$$

と磁場と逆を向く。このような効果も反磁性として働く。金属中の自由電子の運動による磁気モーメントは反磁性の原因となる⁴。

しかし、実際の物質では χ_m/μ_0 の値は非常に小さい。これは、さまざまな効果が打ち消し合ってしまうためである。ほとんどの気体（除く酸素）、有機物、いくつかの金属は反磁性を示し、固体で $|\chi_m|/\mu_0 \sim 10^{-5}$ 程度、また、固体の常磁性体では、 $\chi_m/\mu_0 \sim 10^{-3}$ で、気体の酸素では $\chi_m/\mu_0 \sim 10^{-6}$ である。

3 強磁性

個々の磁気モーメントの間に相互作用が働くと、ある温度（キュリー温度と呼ばれる）以下では外部磁場のない状態でも磁化が発生する物質がある。このような物質は強磁性体と呼ばれる。

このような物質では、磁化と外部磁場は比例せず、また、等価的に決めた χ_m/μ_0 は非常に大きな値をもつ。強磁性体の自発磁化は、磁区と呼ばれる構造をもち、各部分で異なる磁化の方向を持っている。そのため、普通の状態ではキュリー - 温度以下でも巨視的な磁化は観測できない。図 1 は磁区構造の一例である。しかし、外部磁場をかけると磁化の方向が揃った部分の領域が拡大し、大きな磁化が発生する。外部磁場の小さな間は可逆に起きるが、磁場が大きくなると履歴現象（ヒステリシス）が見えるようになる。そして、磁場を取り除いても自発磁化が観測される。

外部磁場に対して、発生した磁化をプロットした曲線を磁化曲線という。図 2 はその例である。この曲線は自発磁化のない状態（点 O）から出発して、点 A で最大値（ほぼ飽和する）をとる。この初期曲線で

³量子力学ではこれらの量は演算子によって表現され、単純な数ではない。

⁴この運動を量子力学的に扱うことで説明される反磁性を、ランダウの反磁性という。

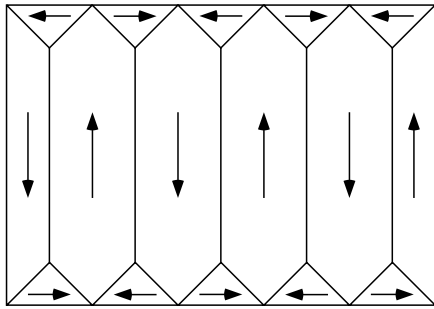


図 1: 磁区の例

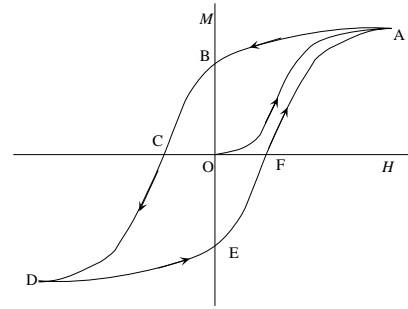


図 2: 磁化曲線

の傾き dM/dH を初期磁化率、最大の値を最大磁化率という。高透磁率の材料では、最大磁化率は 10^6 に達する。

点 A から磁場を減らすと磁場が 0 の状態 (点 B) でも 0 でない磁化が残る。この値を残留磁気 (M_r) という。さらに逆向きの磁場をかけると点 C で磁化が 0 になる。このときの磁場の値を保磁力 (H_c) という。さらに磁場を強くすると点 D で逆向きの飽和磁化に到達し、ここから磁場を反転させると、点 E と点 F を通り点 A に到達する。このように H と M の間には履歴が生じる。この曲線に沿って一周する時、外部磁場が磁性体になした仕事は、単位体積あたり

$$W = \mu_0 \oint H dM \quad (37)$$

で与えられ、これは損失 (熱) となる (ヒステリシス損とか鉄損と呼ばれる)。

永久磁石に用いられるような強磁性体は、 M_r や H_c が大きな材料が選ばれ、硬い材料と呼ばれる。そして、 $M_r H_c$ を磁石材料の性能指数という。日本で開発された、ネオジウム-鉄-ほう素 (Nd-Fe-B) 磁石は、残留磁化に相当する磁束密度の値 ($B_r = \mu_0 M_r$) がほぼ 1 T に達し、非常に高い性能を誇る。また、トランスの鉄心などに用いられる材料では式 (37) による損失がなるべく小さな材料 (けい素鋼など) が選ばれ、柔らかい材料と呼ばれる。

参考文献

- [1] 平川浩正:「電磁気学」(培風館、1968年)。
- [2] 高橋秀俊:「電磁気学」(裳華房、1959年)。
- [3] 中山正敏:「物質の電磁気学」(岩波書店、1996年)。
- [4] 砂川重信:「理論電磁気学」第2版(紀伊国屋書店、1973年)。

問題

1. 半径 a 、透磁率 μ の常磁性体の球に一様な磁場をかけた時の磁場を求めよ。
2. 直線電流の作る磁場を磁位で表せ。