『電磁気学第２』参考資料 問題解答

【荷電粒子からの電磁波放射】

1. 公式を使うためには t_0 を計算しなければならない。今、$\xi_x = \xi_y = 0$、$\xi_z = vt$ である。従って、

$$c(t - t_0) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - vt_0)^2} \tag{1}$$

によって t_0 が決まる。ここで、$\Delta t = t - t_0$、$z' = z - vt$ とすると、

$$c\Delta t = \sqrt{x^2 + y^2 + (z' + v\Delta t)^2} \tag{2}$$

である。この解は

$$\Delta t = \frac{z'v + c\sqrt{D}}{c^2 - v^2} \quad (\Delta t > 0) \tag{3}$$

$$D = (1 - \beta^2)(x^2 + y^2) + z'^2 \geq 0 \tag{4}$$

である。これを用いて s を計算すると

$$s = c\Delta t - (z' + v\Delta t)v/c = \sqrt{D} \tag{5}$$

となる。よって、ポテンシャルは

$$\phi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{D}} \tag{6}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 e}{4\pi}\frac{v}{\sqrt{D}}\mathbf{e}_z \tag{7}$$

となる。

ところで、この式は粒子の静止系ではクーロンポテンシャルに一致するべきである。特殊相対論によれば、z 方向に v で運動する慣性系へのローレンツ変換は

$$z' = \gamma(z - \beta\, ct) \tag{8}$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta\, z) \tag{9}$$

また、この逆変換は

$$z = \gamma(z' + \beta\, ct') \tag{10}$$

$$ct = \gamma(ct' + \beta\, z') \tag{11}$$

と表される。ここで、$\beta = v/c$、$\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ である。また、この変換に対して、ϕ/c は時間座標 (ct)、$\mathbf{A}$ は空間座標 $(\mathbf{r})$ と同じ変換を受ける。

そこで、まず粒子の静止系で計算する。静止系ではクーロン場だけが存在し、

$$\phi'(r') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r'} \tag{12}$$

と表される。これを、ローレンツ変換して元の座標系にもどす。この時、

$$\phi/c = \gamma\phi'/c \quad A_z = \gamma\beta\phi'/c \tag{13}$$

で、また、座標の成分のローレンツ変換を考えれば

$$r'^2 = x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2 = \gamma^2 D \tag{14}$$

である。したがって、式 (6) と式 (7) が成り立つ。静的な場では電磁波は存在しない。慣性系の同等性を考えると、粒子が等速度運動している系では電磁波の放出は起きない。

2.

$$\begin{aligned} E &= \int \frac{e^2\dot{\beta}^2}{6\pi\varepsilon_0 c(1-\beta^2)^3}\mathrm{d}t_0 = \int_0^{v_0} \frac{e^2\dot{\beta}^2}{6\pi\varepsilon_0 c(1-\beta^2)^3}\frac{\mathrm{d}t_0}{\mathrm{d}v}\mathrm{d}v \\ &= \frac{e^2\dot{\beta}}{96\pi\varepsilon_0 c}\left(\frac{4\beta_0}{(1-{\beta_0}^2)^2} + \frac{6\beta_0}{1-\beta_0^2} + 3\log\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}\right) \ (\beta_0 = v_0/c) \end{aligned} \tag{15}$$

3. 電子の速さを v とすると、$v = c/n$ より速いと放射が起きる。水の屈折率は $n = 1.3$ だから、$E = 0.8\mathrm{MeV}$ より大きい場合である。

4. 略