

【荷電粒子からの電磁波放射】

1 リエナール・ヴィーヘルトポテンシャル

電荷 e を持った点電荷の運動の軌跡が $\xi(t)$ で与えられているとき、電荷密度 ρ 、電流密度 \mathbf{i} は

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e\delta(\mathbf{r} - \xi(t)) \quad (1)$$

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = e\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r} - \xi(t)) \quad (2)$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\xi}{dt} \quad (3)$$

である。これらを、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (5)$$

で表される遅延ポテンシャルに代入すれば運動する荷電粒子の作る電磁場を求めることができる。しかし、このままでは計算がやりにくいので、遅延グリーン関数を使った表式に戻ることにする。例えば、スカラーポテンシャルでは

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \xi(t')|/c)}{|\mathbf{r} - \xi(t')|} \end{aligned} \quad (6)$$

と、空間座標の積分を先に実行する。最後の t' の積分はデルタ関数の引数が t' の関数として与えられているので、デルタ関数の

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - a_i)}{|f'(a_i)|} \left(f'(x) = \frac{df}{dx} \right) \quad (7)$$

という性質を使う。ここで、 a_i は $f(x) = 0$ の根である。今の場合

$$f(t') = t - t' - |\mathbf{r} - \xi(t')|/c \quad (8)$$

$$\frac{df}{dt'} = -1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad \left(\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \quad (9)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} - \xi(t')}{|\mathbf{r} - \xi(t')|} \quad (10)$$

$$(11)$$

となり、式 (8) の $f(t') = 0$ の根を t_0 とすると、式 (6) は、

$$\phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{s(t_0)} \quad (12)$$

となる。ここで、

$$s(t_0) = |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}(t_0)|[1 - \beta_R(t_0)] = |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}(t_0)| - (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}(t_0)) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_0) \quad (13)$$

$$\beta_R(t_0) = \mathbf{n}(t_0) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_0) \quad (14)$$

である。同様に計算するとベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A} = \frac{e\mu_0 \mathbf{v}(t_0)}{4\pi s(t_0)} \quad (15)$$

となる。このポテンシャルをリエナール・ヴィーヘルト (Lienard-Wiechert) ポテンシャルという。ここで、 t_0 は、

$$t_0 = t - |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}(t_0)|/c \quad (16)$$

を満たす。この式は、時刻 t_0 に粒子を出た光が t に観測点に到達するということを表している。

1.1 電場と磁場

粒子の運動が一般的な場合には、電磁波が放出される。これを調べるためには、まずポテンシャルを微分して、電場と磁場を計算する必要がある。この時、 t_0 は t と \mathbf{r} の関数となるので、微分して電場や磁場の計算をする時には考慮しなければならない。つまり、

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t_0}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t_0} \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)^* + \frac{\partial t_0}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial t_0} \quad (18)$$

$$(19)$$

としなければならないのである。ここで $(\partial/\partial x^k)^*$ は、陽に含まれる x^k に対する偏微分を表す。そして、式 (16) の両辺を t で微分すると

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = 1 + \mathbf{n}(t_0) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_0) \frac{\partial t_0}{\partial t} \quad (20)$$

となるので、

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = \frac{1}{1 - \beta_R} \quad (21)$$

である。また、 x^k で微分すると

$$\frac{\partial t_0}{\partial x^k} = -\frac{n^k}{c} + \mathbf{n}(t_0) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_0) \frac{\partial t_0}{\partial x^k} \quad (22)$$

だから

$$\frac{\partial t_0}{\partial x^k} = -\frac{n^k}{c(1 - \beta_R)} \quad (23)$$

である。では、これらの関係を使って、まず電場を計算する。

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (24)$$

を計算するので、

$$\text{grad } \phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\text{grad}^* \frac{1}{s} - \frac{\mathbf{n}}{c(1 - \beta_R)} \frac{\partial}{\partial t_0} \frac{1}{s} \right) \quad (25)$$

$$\text{grad}^* \frac{1}{s} = -\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{s^2} \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \frac{1}{s} = c \left(\frac{\beta_R - \beta^2}{s^2} + \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{n}}{s(1 - \beta_R)c} \right) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{1}{1 - \beta_R} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t_0} \\ &= \frac{\mu_0 e c}{4\pi} \left(\frac{1}{1 - \beta_R} \right) \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{s} + \boldsymbol{\beta} \frac{\partial}{\partial t_0} \frac{1}{s} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

を計算しておく。そして、これらを整理して式 (24) に代入すると

$$\mathbf{E} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n})(1 - \beta^2)}{s^2(1 - \beta_R)} + \frac{1}{cs(1 - \beta_R)^2} \left((1 - \beta_R)\dot{\boldsymbol{\beta}} + (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n})(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{n}) \right) \right] \quad (29)$$

となる。また、 $1 - \beta_R = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}$ という関係を使うと¹

$$\mathbf{E} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n})(1 - \beta^2)}{s^2(1 - \beta_R)} + \frac{\mathbf{n} \times [(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{cs(1 - \beta_R)^2} \right] \quad (30)$$

とまとめることができる。次は磁場の計算をする。

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot}^* \mathbf{A} - \frac{1}{c(1 - \beta_R)} \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t_0} \quad (31)$$

である。そして、

$$\text{rot}^* \mathbf{A} = -\frac{e\mu_0 \mathbf{v}}{4\pi} \times \text{grad}^* \frac{1}{s} = -\frac{e\mu_0 c}{4\pi} \frac{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}}{s^2} \quad (32)$$

であるから、整理をすると

$$\mathbf{B} = -\frac{e\mu_0}{4\pi} \mathbf{n} \times \left(\frac{(1 - \beta^2)c\boldsymbol{\beta}}{s^2(1 - \beta_R)} + \frac{\mathbf{n} \times [(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{s(1 - \beta_R)^2} \right) \quad (33)$$

となる。すぐに分かることは $\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}/c$ である。また、

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{s^2} \quad (34)$$

である。さらに、十分遠方では $s \sim r$ となるから $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ に比例する項は $1/r$ で小さくなるのに対して、それ以外の項は $1/r^2$ で小さくなるのがわかる。前者は放射を表し、後者は電場ならばクーロン場に相当する場を表している。

2 電磁波の放射エネルギー

では、荷電粒子から放出される電磁波のエネルギーを計算してみる。そのため、ポインティングベクトルを計算する。波動域では

$$\mathbf{S} = \frac{|\mathbf{E}|^2}{\mu_0 c} \mathbf{n} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\mathbf{n} \times [(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{s^2(1 - \beta_R)^4} \mathbf{n} \quad (35)$$

¹さらに、ベクトル解析の公式、 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ を利用する。

である。これを半径 $R = |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}(t_0)|$ の球面で積分すると、この球面を通過した単位時間当たりのエネルギーとなる。そして、これは t_0 に荷電粒子が放出したパワーである。すなわち、

$$\frac{dW(t_0)}{d\Omega} dt_0 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} R^2 dt \quad (36)$$

である。従って、粒子が放出した単位立体角あたりのパワーは

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{\partial t}{\partial t_0} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} R^2 \quad (37)$$

となる。そして、これを立体角で積分して、

$$W = \int \frac{\partial t}{\partial t_0} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} R^2 d\Omega \quad (38)$$

が粒子に放出した全パワーである。また、

$$|\mathbf{n} \times [(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2 = (1 - \beta_R)^2 |\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 + 2(1 - \beta_R)(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - (1 - \beta^2)(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \quad (\beta^2 = |\boldsymbol{\beta}|^2) \quad (39)$$

と、 $s = R(1 - \beta_R)$ 、 $(\partial t / \partial t_0) = 1 - \beta_R$ を代入すると

$$W = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \int \frac{1}{(1 - \beta_R)^5} \left[(1 - \beta_R)^2 |\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 + 2(1 - \beta_R)(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - (1 - \beta^2)(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \right] d\Omega \quad (40)$$

となる。そして、 $\boldsymbol{\beta}$ と $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ のなす角を Θ として全立体角で積分すると

$$W = \frac{e^2 |\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{6\pi \epsilon_0 c} \frac{(1 - \beta^2 \sin^2 \Theta)}{(1 - \beta^2)^3} \quad (41)$$

が得られる。この式は

$$W = \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c} \frac{|\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 - |\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{(1 - \beta^2)^3} \quad (42)$$

と書くこともできる。いずれにしろ、 $\beta \ll 1$ ならば、

$$W \sim \frac{e^2 |\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{6\pi \epsilon_0 c} = \frac{e^2 |\ddot{\boldsymbol{\xi}}|^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \quad (43)$$

となって、ラーモアの輻射公式に帰着される。

2.1 加速度と速度が平行の場合

この場合、波動域での電場と磁場は

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{cs(1 - \beta_R)^2} \right), \quad \mathbf{B} = \frac{e\mu_0}{4\pi} \mathbf{n} \times \left(\frac{\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{s(1 - \beta_R)^2} \right) \quad (44)$$

で、放射エネルギーの角分布は

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2 |\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (45)$$

となる。ここで、 θ は \mathbf{n} と $\boldsymbol{\beta}$ のなす角度である。これを θ で微分して、強度が最大の角度を求めると

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1}{3\beta} \quad (46)$$

となる。もし、 $\beta \sim 1$ のときは $\theta \sim \sqrt{1 - \beta^2}/2$ となり、前方に強度が集中することが分かる。さらに、全立体角で積分すると

$$W = \frac{e^2 |\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{6\pi \epsilon_0 c (1 - \beta^2)^3} \quad (47)$$

となる。これは、式 (41) に $\Theta = 0$ を代入すれば得られる。荷電粒子が外力によって急速に減速される時に観測される制動放射 (Bremsstrahlung) が代表的な例である。

2.2 加速度と速度が直角の場合

次は加速度と速度が直角の場合を考えよう。この場合、 β を x 方向、 $\dot{\beta}$ を y 方向にとる。すると放出エネルギーの角分布は

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2|\dot{\beta}|^2}{16\pi^2\epsilon_0c^3} \frac{(1-\beta^2)\cos^2\theta + (\beta - \sin\theta\cos\varphi)^2}{(1-\beta\sin\theta\cos\varphi)^5} \quad (48)$$

となる。この式を $\theta = \pi/2$ の面で評価すると、 $\varphi = 0$ の付近、つまり β の方向に強く放出されることがわかる。そして、 $\beta \sim 1$ になると放出される電磁波の広がり是非常に狭くなる。また、全放射エネルギーは

$$W = \frac{e^2|\dot{\beta}|^2}{6\pi\epsilon_0c^3(1-\beta^2)^2} \quad (49)$$

となる。この式は、やはり、式 (41) に $\Theta = \pi/2$ を代入すれば得られることがわかる。代表的な例は磁場中の荷電粒子の円運動によるものであり、シンクロトロン放射と呼ばれる（磁気制動放射とも呼ばれる）。シンクロトロンに代表される円形加速器では、この放射によって粒子のエネルギーが散逸されるため、粒子に高いエネルギーを与えるために大きな電力が必要となる。特に電子を加速する加速器では非常に厳しい制限となる。逆に、この粒子からの放射は非常に強度の高い X 線となるので、様々な研究に用いられている（軌道放射光、SOR）。

3 チェレンコフ放射

次は、媒質中を運動する荷電粒子の場合を考える。今、媒質は一様な誘電率 ϵ と透磁率 μ を持っているとする。すなわち、

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} \quad (50)$$

が成り立つとしよう。この時、電磁場の方程式は伝播速度が $c' = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ の波動方程式に帰着される²。今、 $c' < c$ だから、媒質中を運動する粒子の速度が c' より速くなる場合も有り得る。そこで、粒子は z 軸に沿って v で運動しているとして計算する。ある時刻 ($t = 0$ とする) に $z = 0$ に荷電粒子が存在していたとする。この時、たとえば、その情報は電場の広がりとなって伝わり、 t だけ時間が経過するとその電場は $r = c't$ の球面上にある。しかし、粒子は $z = vt$ の位置にいて、もし、 $v > c'$ ならば、その球面の外側にいる。粒子を頂点とし、電場の作る球面に接する円錐の内部だけに電場が存在する。この円錐面は衝撃波の波面を表し、チェレンコフ円錐と呼ばれている（図 1）。そして、円錐の頂角は

$$\tan\theta = \frac{c'}{\sqrt{v^2 - c'^2}} \quad (51)$$

である。そして、電磁波が円錐状の衝撃波となって伝播していくことを表している。このような放射をチェレンコフ放射という。高速の荷電粒子が、水や空気などに突入したときの発生する。逆にこの現象を利用して、荷電粒子を検出する装置が作られている。チェレンコフ光の広がりや円錐の方向で粒子のエネルギーや飛来した方向（運動量）などを知ることができる。

4 放射の反作用

荷電粒子が加速度運動をすると、電磁波を放出してエネルギーを失う。これは、放射を行うことによる反作用を受けていると考えることができる。今、粒子の速度が遅い場合を考える。また、粒子が受ける力

²しかし、ローレンツ変換に対して不変ではない。この場合は媒質が存在し、媒質に対して運動する座標系から見ると、式 (50) のような関係は成り立たない。また、ローレンツ変換中の c を c' に置き換えた変換では、ダランベール演算子是不変に保たれるが、この変換によって、スカラーポテンシャルやベクトルポテンシャルがどのように変換されるかは分からない。

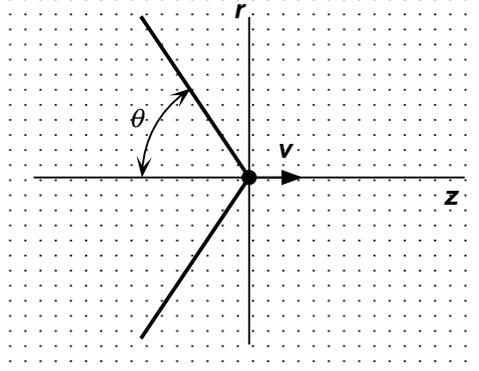


図 1: チェレンコフ円錐

は、 $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/c$ だから $|\mathbf{v} \times \mathbf{B}| \sim \beta|\mathbf{E}|$ となるので、磁場による力は無視して電場だけを考える。すると粒子が受ける力は

$$\mathbf{F} = \int \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} \quad (52)$$

となる。さらに、

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (53)$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (54)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (55)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e\delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}(t)) \quad (56)$$

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = e\dot{\boldsymbol{\xi}}\delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}(t)) \quad (57)$$

を使って計算を行う。そして、 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c \ll t$ として、

$$\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) = \sum_{n=0} \frac{\partial^n \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t^n} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{R}{c}\right)^n \quad (58)$$

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) = \sum_{n=0} \frac{\partial^n \mathbf{i}(\mathbf{r}', t)}{\partial t^n} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{R}{c}\right)^n \quad (59)$$

のように展開し、表面積分の項を落とし、 $\boldsymbol{\xi}$ の 1 次の項を拾うと

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{3} \frac{(-1)^n}{n! c^{n+2}} \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}', t) |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{n-1} \right] \frac{d^{n+2}\boldsymbol{\xi}}{dt^{n+2}} \quad (60)$$

となる³。この展開式の第 1 項 ($n = 0$) は

$$\mathbf{F}^{(0)} = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0} \left(\int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \frac{d^2\boldsymbol{\xi}}{dt^2} \quad (61)$$

であるが、まともに計算すると発散する。これは自己エネルギーの問題で、古典電磁気学の困難の一つであり、さらに量子化された電磁気学(量子電磁気学)でも表れる。そこで、切断を入れる ($|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + a_0/2$) と

$$\mathbf{F}^{(0)} = -\frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 a_0 c^2} \frac{d^2\boldsymbol{\xi}}{dt^2} \quad (62)$$

³この計算の詳細は文献 [3] に書かれている。結構、面倒くさい計算である。

となる。この項は加速度に比例する項で、荷電粒子の質量が増えたような効果として表れる。すなわち、元々の質量を m とすると

$$m_e = m + \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 a_0 c^2} \quad (63)$$

という有効質量が実際の運動に関与するようになるのである。しかし、 $a_0 \rightarrow 0$ では発散してしまうから、 m も（負の）無限大であるとし、二つの項の和が有限となり、実際に観測される質量は m_e であると考えられる。こうすると、事実上は無限大が出なくなる。このような考え方を発展させたものが繰り込み理論である。次の $n = 1$ の項は有限の値になり、

$$\mathbf{F}^{(1)} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^3 \boldsymbol{\xi}}{dt^3} \quad (64)$$

という値になる。この $\mathbf{F}^{(1)}$ が粒子に対してする仕事を計算してみると

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}^{(1)} \cdot \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} dt = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\left[\frac{d^2 \boldsymbol{\xi}}{dt^2} \cdot \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{d^2 \boldsymbol{\xi}}{dt^2} \right|^2 dt \right) \quad (65)$$

となるが、右辺の第1項は運動が有界な場合は無視できるようになる。第2項は、ちょうどラーモアの放射公式から計算される電磁波の放射エネルギーに等しい。すなわち、この力が電磁波を放出による反作用を表していると考えられることができる。しかし、変位の3階微分に比例する力を入れた運動方程式

$$m \left(\frac{d^2 \boldsymbol{\xi}}{dt^2} - \tau_0 \frac{d^3 \boldsymbol{\xi}}{dt^3} \right) = \mathbf{F} \quad (66)$$

$$\tau_0 = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 m c^3} \quad (67)$$

は、普通に解くと非現実的な解を持つ。また、初期条件に位置と速度以外の情報を与えないと解けない。例えば、式(66)で $\mathbf{F} = 0$ の場合でも

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}_0 e^{t/\tau_0} + \mathbf{V}t + \boldsymbol{\xi}_0 \quad (68)$$

という解があり、時刻と共に発散する項が含まれる。そこで初期条件で $\mathbf{A}_0 = 0$ という条件をつけて、非現実的な解を排除するという操作が必要になる。これが、この取扱い方法の限界を示している。この表式は、相対論的に不変な形ではない。この式に相当するローレンツ変換に対して不変な形は

$$K^\mu = \tau_0 \left(\frac{d^2 p^\mu}{d\tau^2} - \frac{p^\mu}{m^2 c^2} \eta_{\nu\lambda} \frac{dp^\nu}{d\tau} \frac{dp^\lambda}{d\tau} \right) \quad (69)$$

となる。この式はミンコフスキー型の力で、 $u_\mu K^\mu = 0$ という条件を満たしている。なお、式(60)の $n > 1$ の項は、点電荷に対しては零になる。

補遺

A フーリエ変換による解法を用いたチェレンコフ放射のポテンシャル

ポテンシャルの満たす方程式は

$$-\epsilon\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (70)$$

$$-\epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{i} \quad (71)$$

$$\text{div } \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (72)$$

となる。いま、粒子は z 軸に沿って、 v で運動しているとすれば $i_x = i_y = 0$ となり、

$$\rho = e\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt) \quad (73)$$

$$i_z = ev\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt) \quad (74)$$

である。式 (70) に式 (73) を代入し、フーリエ変換を行うと

$$\left[\left(\frac{\omega}{c'} \right)^2 - K^2 \right] \phi = -2\pi\delta(\omega + K_z v) \frac{e}{\varepsilon} \quad (75)$$

となるから、 ω に対しては逆フーリエ変換することができる。その結果は

$$\phi(K_x, K_y, K_z, t) = \frac{e}{\varepsilon} \frac{e^{-iK_z vt}}{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 [1 - (v/c')^2]} \quad (76)$$

である。

A.1 粒子の速度が c' より遅い場合

まず、 $v < c'$ としよう。その場合は、 $g = 1/\sqrt{1 - (v/c')^2}$ とおいて

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{e}{\varepsilon(2\pi)^3} \int \frac{e^{i[K_x x + K_y y + K_z(z-vt)]}}{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2/g^2} dK_x dK_y dK_z \quad (77)$$

と書ける。この積分は

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (78)$$

$$K^2 = K_x^2 + K_y^2 \quad (79)$$

$$K_x x + K_y y = Kr \cos \theta \quad (80)$$

$$dK_x dK_y = K dK d\theta \quad (81)$$

などの関係を用い、さらにベッセル関数の公式⁴

$$e^{iz \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta} \quad (82)$$

を使って計算すると、

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{e}{\varepsilon(2\pi)^2} \int_0^\infty K dK J_0(Kr) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iK_z(z-vt)}}{K^2 + K_z^2/g^2} dK_z \quad (83)$$

となる。まず、 K_z の積分を行う。 $z - vt > 0$ の時は上半面を積分路に選び、 $K_z = igK$ の極の寄与を拾うと

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{ge}{4\pi\varepsilon} \int_0^\infty dK e^{-gK(z-vt)} J_0(Kr) \quad (84)$$

となる。さらに、

$$\int_0^\infty J_0(bx) e^{-ax} dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{Re}(a \pm ib) > 0) \quad (85)$$

を用いると

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{ge}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{g^2(z-vt)^2 + r^2}} = \frac{e}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{(z-vt)^2 + [1 - (v/c')^2](x^2 + y^2)}} \quad (86)$$

となる。 $z - vt < 0$ の場合も同じ結果を与える。

⁴この節では特殊関数の積分公式を多用する。これらは文献 [4] に集められている。

A.2 粒子の速度が c' より速い場合

次は、 $v > c'$ の場合では、

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{e}{\varepsilon(2\pi)^3} \int \frac{e^{i[K_x x + K_y y + K_z(z-vt)]}}{K_x^2 + K_y^2 - K_z^2/h^2} dK_x dK_y dK_z \quad (87)$$

と書ける。今度は極が実軸上にできるので、積分を行うためには境界条件を考慮して、積分路を変更しないといけない。満たすべき条件は、電磁場は粒子を中心にして外向きに広がるというものである。そこで、

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{e}{2\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dK_z e^{iK_z(z-vt)} \Phi(x, y, K_z/h) \quad (88)$$

$$\Phi(x, y, K_z/h) = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{e^{i(K_x x + K_y y)}}{K_x^2 + K_y^2 - K_z^2/h^2} dK_x dK_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{K J_0(Kr)}{K^2 - (K_z/h)^2} dK \quad (89)$$

として、まず Φ を求める。この式から、 Φ は

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \left(\frac{K_z}{h}\right)^2 \Phi = -\delta(x)\delta(y) \quad (90)$$

を満たす、2次元のヘルムホルツ方程式のグリーン関数であるということが分かる。そして、

$$K_0(ay) = \int_0^{\infty} \frac{x J_0(ax)}{x^2 + y^2} dx \quad (a > 0, \operatorname{Re} y > 0) \quad (91)$$

$$K_\nu(x) = \frac{i\pi}{2} e^{i\nu\pi/2} H_\nu^{(1)}(ix) \quad (92)$$

という第2種変形ベッセル関数 $K_\nu(x)$ の公式を使うと、

$$H_0^{(1)}(ay) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{2}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{x J_0(ax)}{x^2 - (y + i\epsilon)^2} dx \quad (93)$$

また、

$$H_\nu^{(2)}(x) = \left(H_\nu^{(1)}(x)\right)^* \quad (94)$$

だから、

$$H_0^{(2)}(ay) = -\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{2}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{x J_0(ax)}{x^2 - (y - i\epsilon)^2} dx \quad (95)$$

となるので、

$$\Phi(x, y, K_z/h) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(|K_z/h|r) \quad \text{or} \quad -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(|K_z/h|r) \quad (96)$$

である。そして、ハンケル関数の漸近形は

$$H_0^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x-\pi/4)} \quad (97)$$

$$H_0^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x-\pi/4)} \quad (98)$$

である。今、時間依存性は $e^{-iK_z vt}$ なので、 $K_z > 0$ ならば $H_0^{(1)}(x)$ が、 $K_z < 0$ ならば $H_0^{(2)}(x)$ がそれぞれ外向きの波を表している。従って、これらの条件を満たすようにすると

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) &= \frac{ei}{8\pi\varepsilon} \int_0^{\infty} dK_z \left[H_0^{(1)}(K_z r/h) e^{iK_z(z-vt)} - H_0^{(2)}(K_z r/h) e^{-iK_z(z-vt)} \right] \\ &= -\frac{e}{4\pi\varepsilon} \operatorname{Im} \left[\int_0^{\infty} H_0^{(1)}(K_z r/h) e^{iK_z(z-vt)} dK_z \right] \end{aligned} \quad (99)$$

である。この積分は

$$\text{Im} \left[\int_0^\infty H_0^{(1)}(bx) e^{iax} dx \right] = \int_0^\infty [J_0(bx) \sin ax + N_0(bx) \cos ax] dx \quad (100)$$

$$\int_0^\infty \begin{cases} J_0(bx) \sin ax \\ -N_0(bx) \cos ax \end{cases} dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} & (a > b > 0) \\ 0 & (b > a > 0) \end{cases} \quad (101)$$

という公式を使うと

$$\text{Im} \left[\int_0^\infty H_0^{(1)}(bx) e^{iax} dx \right] = \begin{cases} 0 & (b > 0, a + b > 0) \\ -\frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} & (b > 0, a + b < 0) \end{cases} \quad (102)$$

という公式になるから

$$\phi(x, y, z, t) = \begin{cases} \frac{e}{2\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{(z - vt)^2 - [(v/c')^2 - 1](x^2 + y^2)}} & (vt - z > r/h) \\ 0 & (vt - z < r/h) \end{cases} \quad (103)$$

となる。

参考文献

- [1] 平川浩正：「電気力学」(培風館、1973年)。
- [2] 高橋康：「電磁気学再入門」(講談社、1994年)。
- [3] 砂川重信：「理論電磁気学」第2版(紀伊国屋書店、1973年)。
- [4] 森口繁一他：「岩波数学公式集 III 特殊関数」(岩波書店、1987年)。
- [5] 今村勤：「物理とグリーン関数」(岩浪書店、1978年)。

問題

1. z 方向に、速度 v で等速度運動する荷電粒子の作るポテンシャルを、式 (12)、式 (15) を用いて計算せよ。また、粒子の静止系で計算したポテンシャルからローレンツ変換することで計算し、同じ結果が得られることを示せ。
2. 式 (47) を用い、速度を v_0 から 0 まで一様に減速した場合に、放出される全エネルギーを求めよ。
3. 水に高速の電子を打ち込む場合、チェレンコフ光を観測するためには電子のエネルギーは最低いくら必要か。電子のエネルギーは、速さを v とすると $E = m_e c^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$ で与えられる。
4. 式 (83) の積分を

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{e}{2\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dK_z e^{iK_z(z-vt)} \Psi(x, y, K_z/g) \quad (104)$$

$$\Psi(x, y, K_z/g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty K dK \frac{J_0(Kr)}{K^2 + K_z^2/g^2} \quad (105)$$

と書き直すと、 Ψ は、2次元の変形ヘルムホルツ方程式のグリーン関数である、すなわち

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \left(\frac{K_z}{g}\right)^2 \Psi = -\delta(x)\delta(y) \quad (106)$$

を満たすことを示し、

$$\Psi(x, y, K_z/g) = \frac{1}{2\pi} K_0(|K_z/g|r) \quad (107)$$

となることを示せ。