『電磁気学第２』講義資料 No.5 問題解答

1. $\mathrm{div}\,\mathbf{D}=0$ なので、波数ベクトルと $\mathbf{D}$ は直交するが、$\mathbf{E}$ と $\mathbf{D}$ は平行ではないので、ポインティングベクトルと波数ベクトルは平行にならない。このため、エネルギーの進む方向と波数ベクトルの向きが異なる。

2. 誘電体は一様と仮定すると、球の外も中も $\Delta\phi=0$ を満たす静電ポテンシャルで記述できる。境界条件は、

   (a) 球の外では $r\to\infty$ で $\phi\to -E_0 r\cos\theta$

   (b) $r=0$ で正則

   (c) 球の表面 $(r=a)$ で、ϕ と電束密度の法線成分が連続

   である。$\Delta\phi=0$ を極座標で変数分離して解くが、対称性から角度は θ に依存するのみである。よって、ルジャンドルの多項式 $P_n(x)$ を使って

$$\phi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n r^n+\frac{b_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) \tag{1}$$

   と表すことができる。まず、球の外側を考えると、無限遠での条件で a_n は $n=1$ 以外は 0、$a_1=-E_0$ であることが分かる。また、球の内側では、すべての b_n が 0 となる。そこで、球の外側を ϕ_1、内側を ϕ_2 とし、

$$\begin{aligned}\phi_1(r,\theta) &= -E_0 r\cos\theta+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta) \qquad (2)\\ \phi_2(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n P_n(\cos\theta) \qquad (3)\end{aligned}$$

   となる。そして、$r=a$ にて、

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \phi_2 \qquad (4)\\ \varepsilon_0\frac{\partial\phi_1}{\partial r} &= \varepsilon\frac{\partial\phi_2}{\partial r} \qquad (5)\end{aligned}$$

   が成り立つように、係数を決めると、

$$\begin{aligned}-E_0 a+\frac{b_1}{a^2} &= a_1 a \qquad (6)\\ \varepsilon_0(-E_0-2\frac{b_1}{a^3}) &= \varepsilon a_1 \qquad (7)\end{aligned}$$

   で、それ以外の係数は 0 である。ここから、求めるべきポテンシャルの表現が得られる。

3.
$$\chi(\omega)=\left(\frac{Ne^2}{m}\right)\frac{1}{-\omega^2+\mathrm{i}\gamma\omega+\omega_0^2-Ne^2/(3m\varepsilon_0)} \tag{8}$$

   すなわち、共振周波数が ${\omega_0}^2\to\omega_0^2-Ne^2/(3m\varepsilon_0)$ ように変化するだけである。

4.
$$\begin{aligned}\chi'(\omega)&=\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi''(\omega')}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega'=\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{0}\frac{\chi''(\omega')}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega'+\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\chi''(\omega')}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega'\\ &=\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\chi''(-\omega')}{-\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega'+\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\chi''(\omega')}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega'=\frac{2}{\pi}\mathrm{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\chi''(\omega')\omega'}{\omega'^2-\omega^2}\mathrm{d}\omega' \qquad (9)\end{aligned}$$

   ここで、$\chi''(-\omega')=-\chi''(\omega')$ を用いた。もう一つの式も同じようにできる。

5.
$$\chi''(\omega) = \left(\frac{Ne^2}{m}\right)\frac{\gamma\omega}{({\omega_0}^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} \tag{10}$$

を考え、複素積分を行うと、$\omega = \pm\mathrm{i}(\gamma/2)\pm\tilde{\omega}$ $(\tilde{\omega}^2 = {\omega_0}^2 - \gamma^2/4)$ の 4 つの極が存在する。そのうち 2 つは上半面で、残りは下半面である。クラーマース・クローニッヒの関係を導いた時と同じ積分路を考えると、今度は、下半面の極の寄与が表れる。すなわち

$$\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi''(\omega')}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega' + \mathrm{i}\chi''(\omega) = -2\mathrm{i}(P_1+P_2) \tag{11}$$

ここで、P_1 と P_2 はその留数で、マイナスの符号は積分路の向きが右回りのためである。

$$P_1+P_2 = \frac{\mathrm{i}}{2}\chi(\omega)^* = \frac{\mathrm{i}}{2}[\chi'(\omega)+\mathrm{i}\chi''(\omega)] \tag{12}$$

となることは計算で確かめることかできる。よって、確かにクラマース・クローニッヒの関係を満たしていることが分かる。

6.
$$G(t) = \left(\frac{Ne^2}{m}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{{\omega_0}^2-\omega^2+\mathrm{i}\gamma\omega} \tag{13}$$

を計算すればよい。被積分関数の極は $\omega = \mathrm{i}(\gamma/2)\pm\tilde{\omega}$ $(\tilde{\omega}^2 = {\omega_0}^2-\gamma^2/4)$ で共に、上半面に存在する。従って、$t<0$ の時の積分は、複素平面の下半面を回るので 0、$t>0$ の時は上半面を回るので、

$$G(t) = \left(\frac{Ne^2}{m}\right)\mathrm{e}^{-\gamma t/2}\sin\tilde{\omega}t\,\theta(t) \tag{14}$$

である。ここで、$\theta(t)$ は単位階段関数で、

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \tag{15}$$

である。

7. $x=\chi'/\chi_0$、$y=\chi''/\chi_0$ とし、両式から $\omega\tau$ を消去すると $(x-1/2)^2+y^2=1/4$ という式が得られる。この式は、半径 1/2 で、中心が (1/2, 0) の円を表す。周波数が 0 の時は (1, 0) で表され、$\omega\to\infty$ で、円の上側の円弧を点が移動して原点に到達する。このようなプロットをコール・コール表示 (Cole-Cole Plot) という。