

【誘電体】

1 誘電体と分極

自由に動く電荷が存在しない場合にも、外部から電場が加わると、表面に電荷が現れたりする現象が見られる。これは、物質を構成する原子などの電荷分布が変化して表れたものであると考えられる。通常、原子は正の電荷分布と負の電荷分布が打ち消しあって、電気的に中性を保っているが、電場が加わると、正の電荷と負の電荷は逆向きの力を受けるため、電荷の位置が変化、すなわち分極するのである。このようにして表れる分極を誘電分極、電荷は分極電荷と呼ばれる。一般に絶縁体はこのような性質をもち、誘電体と呼ばれる。

誘電体の性質は、分極ベクトル \mathbf{P} で記述される。これは、分極電荷の移動した方向のベクトルで、大きさはそのベクトルに垂直な単位面積あたりの分極電荷の量で定義される。そこで、小さな立方体を考え、その内部に存在する分極電荷の密度を ρ_d とすると

$$\begin{aligned}\rho_d \Delta x \Delta y \Delta z &= [P_x(x) - P_x(x + \Delta x)] \Delta y \Delta z \\ &+ [P_y(y) - P_y(y + \Delta y)] \Delta z \Delta x \\ &+ [P_z(z) - P_z(z + \Delta z)] \Delta x \Delta y \\ &= -\operatorname{div} \mathbf{P} \Delta x \Delta y \Delta z\end{aligned}\quad (1)$$

すなわち、

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho_d \quad (2)$$

が成り立つ。ガウスの法則を用いれば、電場は真電荷と分極電荷を区別しないはずで

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho + \rho_d \quad (3)$$

が成り立つ¹。そこで、

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4)$$

とすれば、

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (5)$$

となる。この分極は、微視的に見れば、電場で誘起された双極子モーメントの集まりと考えることができるはずである。定義から考えて、ある体積 ΔV を考えた時、

$$\mathbf{P} \Delta V = \Delta N \mathbf{p} \quad (6)$$

となり、 \mathbf{p} と ΔN は ΔV 内に存在する双極子モーメントの平均値とその数である。そこで、誘電体中の双極子モーメントの作る静電ポテンシャルの重ね合わせを計算してみると

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\mathbf{p}_i \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{N(\mathbf{r}') \mathbf{p}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \quad (7)$$

¹ $\rho + \rho_d = \rho_f$ と書いて、自由電荷ということがある。

である。ここで、 $N(\mathbf{r})$ は \mathbf{r} における単位体積あたりの双極子モーメントの数を表す。ところで、

$$\operatorname{div}' \left[\frac{N(\mathbf{r}')\mathbf{p}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right] = \frac{N(\mathbf{r}')\mathbf{p}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} + \frac{\operatorname{div}' [N(\mathbf{r}')\mathbf{p}(\mathbf{r}')] }{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (8)$$

である。ここで、 div' は \mathbf{r}' に対する微分演算を表す。全体を積分すると、左辺はガウスの定理から表面積分に変換されて 0 となる。したがって、

$$\phi_d(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\operatorname{div}' [N(\mathbf{r}')\mathbf{p}(\mathbf{r}')] }{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (9)$$

となるから、

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = N(\mathbf{r})\mathbf{p}(\mathbf{r}) \quad (10)$$

とすると

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_d(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (11)$$

が成り立ち、分極電荷の作る場として表現できる。式 (10) は式 (6) と等価であり、 \mathbf{P} は単位体積あたりの双極子モーメントということになる。

誘電体の性質は、電場に対してどのような分極が生じるかで決まる。電場が弱いときには分極は電場に比例すると考えられるので²、

$$\mathbf{P} = \chi\mathbf{E} \quad (12)$$

と書き、 χ を電気感受率という³。このとき、

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = (\epsilon_0 + \chi)\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E} \quad (13)$$

で、 ϵ を誘電率、 ϵ/ϵ_0 を比誘電率という。

また、誘電体に対する境界条件は、真電荷による表面電荷が存在しなければ

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (14)$$

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (15)$$

である。分極によって生じる表面電荷は考えなくてよいことに注意する。また、静電場ならば、最初の条件は、ポテンシャルが連続という形で表現できる。

たとえば、半径 a で誘電率 ϵ の球に z 軸方向に一樣な電場を掛けると、スカラーポテンシャルは

$$\phi = \begin{cases} -r \cos\theta E_0 \left[1 - \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} \right) \frac{a^3}{r^3} \right] = \phi_1 & (r > a) \\ -r \cos\theta E_0 \left(\frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} \right) = \phi_2 & (r < a) \end{cases} \quad (16)$$

と表される。この式は、

$$\Delta\phi = 0 \quad (17)$$

を、 $r = 0$ で正則、 $r \rightarrow \infty$ で

$$\phi \rightarrow -r \cos\theta E_0 \quad (18)$$

さらに、 $r = a$ で、ポテンシャルが連続、および、

$$D_{1n} = -\epsilon_0 \frac{\partial\phi_1}{\partial r} = D_{2n} = -\epsilon \frac{\partial\phi_2}{\partial r} \quad (19)$$

という境界条件で解くことにより得られる。

²物質によっては、強誘電体に代表されるように外部電場が無くても分極が存在するものがある。また、電場が強いと分極と電場は比例しない非線形になる。

³同様に磁化と磁場の関係が線形の場合、磁気感受率という量が定義される。そこで、電気感受率を χ_e と磁気感受率を χ_m と書く場合もある。

2 簡単な誘電体のモデル

物質を構成する電子は、原子核の回りに束縛されているので、電磁場が存在しないときには平衡位置にいる。この点からの電子の変位を \mathbf{x} とすると、電磁場が存在する時の電子の運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{x}} + \text{grad } U = -e\mathbf{E} \quad (20)$$

である。ここで、 m は電子の質量、 U は束縛力のポテンシャルエネルギー、 e は電気素量 ($1.6 \times 10^{-19}\text{C}$) である。また、速度が遅い場合のみを考えて、磁場による力は無視した。ところで、 U は平衡点の回りで

$$U(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) = U_0 + \sum_{k=1}^3 \left. \frac{\partial U}{\partial x^k} \right|_{\mathbf{x}_0} x^k + \sum_{i,j=1}^3 \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^j} \right|_{\mathbf{x}_0} x^i x^j \quad (21)$$

と展開できる。平衡点では $\partial U / \partial x^k = 0$ だから、

$$U(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) = U_0 + \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \alpha_{ij} x^i x^j \quad (22)$$

$$\alpha_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^j} \right|_{\mathbf{x}_0} \quad (23)$$

と書ける。平衡点は安定でないといけないから、ポテンシャルエネルギーは極小となり、 α_{ij} という行列は正定値対称行列である。対称行列は、直交変換、つまり座標の回転で対角化できる。そのような座標を取ると、

$$U(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) = U_0 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \alpha_i (x^i)^2 \quad (24)$$

という簡単な形になる。このようになる座標軸を主軸という。もし、媒質が等方的ならば $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ はすべて同じ値になる。また、結晶性の媒質ならば等方的な場合以外に、すべてが異なる場合 (2 軸性結晶) 2 つは等しく、1 つだけが異なる場合 (1 軸性結晶) などが存在する。そして、運動方程式を考え、電場や変位が

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}(\omega) e^{i\omega t} \quad (25)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\omega) e^{i\omega t} \quad (26)$$

のような正弦的な変化をしているとすると

$$\mathbf{x}(\omega) = -e(-m\omega^2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\alpha})^{-1} \cdot \mathbf{E}(\omega) \quad (27)$$

という解が得られる。ここで、 \mathbf{I} は単位行列、 $\boldsymbol{\alpha}$ は α_{ij} を要素とする行列である。この運動で誘起される双極子モーメントは $-e\mathbf{x}$ で、この電子が単位体積あたり N 個存在するとすれば、分極ベクトルは

$$\mathbf{P}(\omega) = -Ne\mathbf{x} = Ne^2(-m\omega^2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\alpha})^{-1} \cdot \mathbf{E}(\omega) \quad (28)$$

となる。ここから、分極ベクトルは電場に比例しているが、比例係数は単純な数ではなく、行列でしかも周波数の関数であることがわかる。これは、

$$P^i(\omega) = \sum_{j=1}^3 \chi(\omega)_{ij} E^j(\omega) \quad (29)$$

という形にまとめることができ、さらに、

$$D^i(\omega) = \varepsilon_0 E^i + \sum_{j=1}^3 \chi(\omega)_{ij} E^j(\omega) = \sum_{j=1}^3 \varepsilon(\omega)_{ij} E^j(\omega) \quad (30)$$

と書くこともできる。 $\varepsilon(\omega)_{ij}$ や $\chi(\omega)_{ij}$ は、誘電率テンソル、電気感受率テンソルと呼ばれている。主軸をとれば、

$$\chi_{ij} = \frac{Ne^2}{m} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} & & \\ & \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} & \\ & & \frac{1}{\omega_3^2 - \omega^2} \end{pmatrix} \quad (31)$$

と書ける。ここで、 $\omega_i = \sqrt{\alpha_i/m}$ である。また、誘電率テンソルも同様に対角化できる。いちばん簡単な等方性の物質では

$$\mathbf{P}(\omega) = \chi(\omega)\mathbf{E}(\omega) \quad (32)$$

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\omega) \quad (33)$$

のように書け、もちろん、 $\omega^2 \ll \omega_0^2$ ($\omega_0 = \sqrt{\alpha/m}$) ならば χ や ε は定数と見なせる。その場合には $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ という関係が成立する。これからは、簡単のため等方性の物質を考えよう。上の例では、 χ は実数であったが、一般には

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega) \quad (34)$$

のように複素数になる。例えば、等方的な物質で、運動方程式に散逸項が存在する場合

$$m(\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2\mathbf{x}) = -e\mathbf{E} \quad (35)$$

となるが、この場合の電気感受率は

$$\chi(\omega) = \left(\frac{Ne^2}{m}\right) \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (36)$$

となるので、

$$\chi'(\omega) = \left(\frac{Ne^2}{m}\right) \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (37)$$

$$\chi''(\omega) = \left(\frac{Ne^2}{m}\right) \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (38)$$

となり、 χ'' は運動方程式の散逸項と結びついていることが分かる。

このように、電子の運動を調和振動子で近似して物質の性質を扱うモデルを振動双極子モデルという。この場合、方程式に表れるパラメータは、単純な電子のものではなく、周囲の影響を受けて異なった値となると考える。また、電子の運動による分極の場合、共振周波数で紫外光の領域に表れる。しかし、詳細な計算には量子力学が必要である。

3 物質中の電磁場のエネルギー

真空中では単に電磁場のエネルギー密度は電場や磁場の2乗で書けるが、物質中では、電磁場自身のエネルギーと電磁場と物質の相互作用によるエネルギーの両方を考えないといけない。準静的な過程では、

電磁場が存在するときに分極や磁化を、 $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} + \delta\mathbf{P}$ や $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M} + \delta\mathbf{M}$ のように変化させるの必要な単位体積あたりの仕事は

$$\delta W = \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{P} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{M} \quad (39)$$

である。そこで、電磁場のエネルギー密度の時間変化を

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (40)$$

で定義すれば

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \quad (41)$$

$$u_0 = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{\mu_0}{2} \mathbf{H}^2 \quad (42)$$

だから、電磁場のエネルギー変化は電磁場だけのエネルギー u_0 の変化と分極 \mathbf{P} と電場、磁化 \mathbf{M} と磁場の相互作用による項の和に書くことができる。そして、物質内のポインティングベクトルの発散を計算してみると

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{i} \right) \quad (43)$$

となるので、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{i} \quad (44)$$

と、真空中の電磁場の場合と同じ式が成り立つ。式 (40) が電磁場のエネルギー密度の変化に関するいちばん一般的な表現である。このような形式に書くと、分極や磁化が電場や磁場に比例しない場合でもエネルギーの変化を計算できる。今、電流は流れず ($\mathbf{i} = 0$)、磁気的な性質は無視して $\mathbf{M} = 0$ としよう。その時

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (45)$$

である。そこで、

$$\operatorname{Re} [\mathbf{E}(\omega)e^{i\omega t}] = E_0 \cos \omega t \quad (46)$$

$$\operatorname{Re} [\mathbf{P}(\omega)e^{i\omega t}] = E_0 [\chi'(\omega) \cos \omega t + \chi''(\omega) \sin \omega t] \quad (47)$$

を用いて式 (45) の右辺の計算すると

$$-\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\omega E_0^2}{2} [\chi'(\omega) \sin 2\omega t - \chi''(\omega)(\cos 2\omega t + 1)] \quad (48)$$

となり、時間平均を取ると

$$-\overline{\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}} = -\frac{\omega E_0^2}{2} \chi''(\omega) \quad (49)$$

となる。これは、電磁場のエネルギーがポインティングベクトルによって外に流れ出る以外に、エネルギーが損失していることを表している。すなわち、複素電気感受率の虚部はエネルギーの散逸を表しているのである⁴。このことは、式 (38) のように電子の運動方程式の散逸項と χ'' が結びついていることから理解できる。

⁴もし、 $\chi'' < 0$ の場合は、エネルギーが増加していることになる。このような場合は、他にエネルギーの供給源が必要である。例としては、レーザー発振させるために反転分布が作られている媒体などがある。しかし、ここでは普通の物質を考えるので、 $\chi'' > 0$ であると考えてよい。

4 デバイ緩和

分極を生じる元になるものが、電子の変位ではなく極性を持つ分子などの配向による場合には、復元力に相当するものがない。また、周りの影響を強く受けるので、微視的な双極子モーメントはランダムに運動するだろう。そのため、外部電場により配向したのも、電場がなくなるとある時間が経てば勝手な方向を向き、巨視的な分極は消えてしまう。したがって、この巨視的な分極の運動方程式は、外場がない時には、

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{1}{\tau}\mathbf{P} \quad (50)$$

と書けるだろう。また、静的な外場が存在する時は

$$\mathbf{P}_{dc} = \chi_0 \mathbf{E}_{dc} \quad (51)$$

を満たす。したがって、一般的には

$$\tau \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} + \mathbf{P}(t) = \chi_0 \mathbf{E}(t) \quad (52)$$

を満たすと考えられる。もし、 $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}(\omega) \exp(i\omega t)$ ならば $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(\omega) \exp(i\omega t)$ となり、

$$\mathbf{P}(\omega) = \frac{\chi_0}{1 + i\omega\tau} \mathbf{E}(\omega) \quad (53)$$

となる。したがって、電気感受率は

$$\chi(\omega) = \frac{\chi_0}{1 + i\omega\tau} \quad (54)$$

で与えられ、その実部と虚部は

$$\chi'(\omega) = \frac{\chi_0}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (55)$$

$$\chi''(\omega) = \frac{\omega\tau\chi_0}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (56)$$

と表される。そして、虚部は $\omega\tau = 1$ で最大となる。

このような過程で電気感受率が変化する現象をデバイ型の緩和といい、 τ をデバイの緩和時間という。そして、配向分極の緩和はラジオ波からマイクロ波の周波数で顕著になる。また、これらのパラメータは温度の関数であり、その測定を行うことで、配向する分子など性質を調べることができる。

5 分極率と誘電率

物質を構成する分子や原子は通常は電氣的に中性であるが、電場が掛かると、それに比例した双極子モーメントを持つ。すなわち、

$$\mathbf{p} = \alpha_e \mathbf{E} \quad (57)$$

と書け、 α_e を分極率（または分子分極率）という。従って、誘電体の分極は

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = N\alpha_e \mathbf{E} \quad (58)$$

で与えられる。もし、式(35)が成り立つような場合は、

$$\alpha_e(\omega) = \left(\frac{e^2}{m}\right) \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (59)$$

で与えられる。

また、式 (16) で表されるような誘電体球の場合には外部電場により、

$$p = 4\pi\epsilon_0 \frac{(\epsilon - \epsilon_0)a^3}{2\epsilon_0 + \epsilon} E_0 \quad (60)$$

という双極子モーメントが誘起されたことになる。従って、この球を一つの原子と見れば、

$$\alpha_e = 4\pi\epsilon_0 \frac{(\epsilon - \epsilon_0)a^3}{2\epsilon_0 + \epsilon} \quad (61)$$

となる。また、分極の大きさは

$$P = \frac{3}{4\pi a^3} p = 3\epsilon_0 \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{2\epsilon_0 + \epsilon} E_0 \quad (62)$$

である。ここで、球の内部の電場を見ると

$$E' = \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} E_0 = E_0 + E_P \quad (63)$$

$$E_P = \frac{\epsilon_0 - \epsilon}{2\epsilon_0 + \epsilon} E_0 = -\frac{P}{3\epsilon_0} \quad (64)$$

と、電場は誘電分極を誘起している場 E_0 と分極によって生じた場 E_P の和で書いている。ところで、誘電体中にはたくさんの双極子モーメントが誘起されているはずだから、一様な分極をもった誘電体でも、ミクロに見ると一つ一つの原子・分子は周りの双極子の影響を受けている。従って、原子・分子の感じる電場は、平均的な場とは異なるだろうと予測される。そこで、原子・分子が感じる局所的な電場を E_{Local} とし、この E_{Local} によって双極子が誘起されると考える。すなわち、

$$\mathbf{p} = \alpha_e \mathbf{E}_{Local} \quad (65)$$

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = N\alpha_e \mathbf{E}_{Local} \quad (66)$$

とする。問題はこの E_{Local} をどう見積もるかということになる。誘電体の球の場合のように、平均的な電場 E は分極を引き起こしている電場と平均化した分極の作る電場の和になっている。しかし、 E_{Local} を考える場合は、平均化した分極の場ではなく周りの双極子が作る電場を正確に計算しないといけない。そこで、平均的な電場 E から平均的な分極が作る場 E_P を差し引いたものに周りの双極子が作る場 E_{dipole} を加えて E_{Local} とする。つまり、平均的な電場を考える場合には既に平均的な分極が作る場が計算に含まれているから、その部分を E_{dipole} で置き換えるのである。 E_{Local} を式に書けば、

$$\mathbf{E}_{Local} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_{dipole} - \mathbf{E}_P \quad (67)$$

となる。そして、図 1 に示すような半径 a の球を考えて計算をする。この時、 a は全体の大きさに比べれば十分小さいが、その内部にはたくさんの双極子を含んでいるとする。式 (64) から、一様な分極 P を持つ誘電体球では、

$$\mathbf{E}_P = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (68)$$

という電場が内部にできている。さらに、この電場の大きさは半径によらない。また、対称性の高い結晶や全くランダムな双極子分布の場合は、球の中心では、球の内部で双極子場を足しあわせると 0 になるだろう。すなわち、

$$\mathbf{E}_{dipole} = 0 \quad (69)$$

とする。この仮定はかなり大胆であるが、気体や液体などでは現実的な仮定である。すると、

$$\mathbf{E}_{Local} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (70)$$

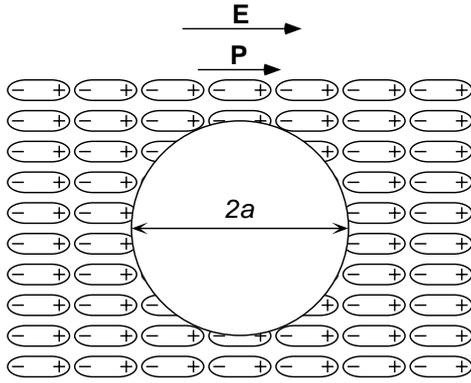


図 1: 誘電体内部の電場

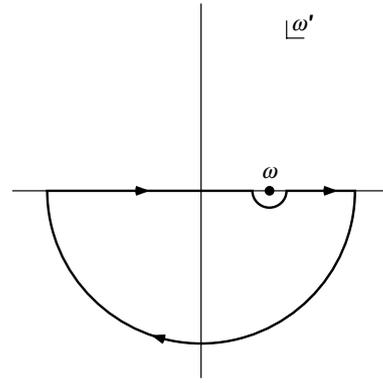


図 2: クラマース・クロニツヒの関係を導くための積分路

という式が得られる。この式をローレンツの電場という。これに式 (66) を代入すると、

$$\mathbf{E}_{\text{Local}} = \frac{1}{1 - N\alpha_e/(3\epsilon_0)} \mathbf{E} \quad (71)$$

$$\mathbf{P} = \frac{N\alpha_e}{1 - N\alpha_e/(3\epsilon_0)} \mathbf{E} \quad (72)$$

となるので、

$$\chi = \frac{N\alpha_e}{1 - N\alpha_e/(3\epsilon_0)} \quad (73)$$

となる。また、

$$\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} = \frac{N\alpha_e}{3\epsilon_0} \quad (74)$$

である。この式をクラウジウス-モソッチ (Clausius-Mossotti) の式という。また、光の周波数領域では屈折率 n は $n^2 = \epsilon/\epsilon_0$ だから、

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N\alpha_e}{3\epsilon_0} \quad (75)$$

と書くこともできる。この式をローレンツ-ローレンツ (Lorentz-Lorenz) の式という。これらの式の左辺を計算すると、近似的に密度に比例することが知られている。固体の場合は、ローレンツの電場ではなく、周りの双極子の寄与を正確に計算しないとイケない場合が多い。

6 クラマース・クロニツヒの関係

今見てきたように、電気感受率や誘電率は電場に対する物質の応答を表している。そのため、これらの関数は様々な制限を受ける。まず、

$$\mathbf{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t)e^{-i\omega t} dt \quad (76)$$

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega)\mathbf{E}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (77)$$

であるが、 $\mathbf{E}(t)$ や $\mathbf{P}(t)$ は実数なので、

$$\chi(\omega)^* = \chi(-\omega) \quad (78)$$

である。したがって、

$$\chi'(\omega) = \chi'(-\omega) \quad (79)$$

$$\chi''(\omega) = -\chi''(-\omega) \quad (80)$$

のように、応答関数の実部は偶関数、虚部は奇関数でなければならない。

さらに、因果律を満たす必要がある。因果律とは、原因となる刺激（この場合は加えた電場）によって応答（この場合は分極）が起きるので、刺激がない間は、何も起きないという事実をいう。これは数学的には、刺激としてデルタ関数（インパルス）を加えたときの応答（インパルス応答関数）が、刺激の加えられる前は0であるという形で表現される。また、ここで議論している $\chi(\omega)$ は、刺激として、インパルスの代わりに正弦波を加えた場合の応答を表していて、線形応答理論では周波数応答関数と呼ばれるものである。このインパルス応答関数と周波数応答関数はお互いにフーリエ変換で結ばれる。誘電応答のインパルス応答関数を $G(t)$ とすると、

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (81)$$

を満たす。そして、因果律を満たす場合ためには $G(t) = 0$ ($t < 0$) でなければならない。そのため、 $\chi(\omega)$ を ω の複素関数と見たとき、下半面で解析的である必要がある⁵。そこで、図2に示すような積分路で積分を行うと、外側の円周上の積分は0になり、

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \pi i \chi(\omega) = 0 \quad (82)$$

となる。ここで P はコーシーの主値積分を意味する。さらに、 $\chi = \chi' - i\chi''$ を代入して、実部と虚部に分けて書くと

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (83)$$

$$\chi''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (84)$$

となる。これは、実部と虚部は独立ではなく、どちらかを決めるともう一方が決まるというものである。誘電率で書く場合は実部は $\omega \rightarrow \infty$ で値が0にならないので、 $\varepsilon(\omega) - \varepsilon(\infty)$ を考えると

$$\varepsilon'(\omega) - \varepsilon(\infty) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (85)$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(\omega') - \varepsilon(\infty)}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (86)$$

となる。この関係をクラマース・クローニツヒ (Kramers-Kronig) の関係という。そして、誘電率は屈折率と関係しているので、誘電率の周波数依存性はそのまます分散関係を表す。そのため、この関係を分散公式ともいう。分光などで、実部または虚部だけが測定できるような場合に、残りの方を計算するために非常によく使われる。

⁵これはフーリエ変換するときの指数関数の符号に依存している。もし、

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} dt$$

という形になっている場合は、上半面で解析的である。また、 $\chi''(\omega)$ の符号が反対となる。そこで、 $\chi = \chi' + i\chi''$ のように χ'' を定義する。

参考文献

- [1] 平川浩正：「電磁気学」(培風館、1968年)。
- [2] 高橋秀俊：「電磁気学」(裳華房、1959年)。
- [3] 中山正敏：「物質の電磁気学」(岩波書店、1996年)。

問題

1. 誘電率が非等方な物質に平面電磁波が入射すると、ポインティングベクトルの向きと波数ベクトルの向きは一致しないことを示せ。
2. 式 (16) を求めよ。
3. クラウジウス-モソッチの関係を考慮した電気感受率に対する式 (73) に、式 (59) を代入すると式 (36) とは異なる式が得られる。どのように違うかを議論せよ。
4. χ' と χ'' の偶奇性を利用すると式 (83) と式 (84) は

$$\chi'(\omega) = \frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^{\infty} \frac{\chi''(\omega') \omega'}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (87)$$

$$\chi''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \text{P} \int_0^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (88)$$

と書けることを示せ。

5. 式 (36) はクラマース-クローニツヒの関係を満たしていることを示せ。
6. 式 (36) を式 (81) に代入して $G(t)$ を求めよ。
7. 式 (55) と式 (56) の値を、実部を横軸、虚部を縦軸にとり、 ω をパラメータとして平面にプロットしてみよ。どのような形になるか。