『物理工学演習第一 電磁気学』第6回 (7月3日）問題

1. 一様に磁化した半径 a の強磁性体球がある。磁化ベクトルは、z 方向を向き、大きさを M とする。
   (a) 球の内部と外部で、磁場（$\mathbf{H}$）を求めよ。
   (b) 球の内部の磁束密度（$\mathbf{B}$）を求めよ。
   (c) この球を一様な外部磁場中に入れた時、磁場と球の相互作用によるエネルギーを外部磁場と磁化の角度の関数として表せ。

2. ローレンツ収縮を考えてみよう。ある慣性系（$\{x\}$ 系と書く）で長さ ℓ の棒が z 軸に沿って静止していて、両端の点の座標は、$\mathrm{P}_1:(ct_1, 0, 0, 0)$ と $\mathrm{P}_2:(ct_2, 0, 0, \ell)$ であったとする。これを z 方向に v で運動する慣性系（$\{x'\}$ 系と書く）でみると、P_1 は $\mathrm{P}'_1:(ct'_1, 0, 0, z'_1)$、$\mathrm{P}_2$ は $\mathrm{P}_2:(ct'_2, 0, 0, z'_2)$ となる。また、$\{x\}$ 系と $\{x'\}$ のローレンツ変換は、$\beta = v/c$、$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ とすると、$x = x'$、$y = y'$ かつ

$$z' = \gamma(z - \beta ct), \;\; ct' = \gamma(ct - \beta z) \tag{1}$$

   である。
   (a) $\{x'\}$ 系で、P'_1 と P'_2 の座標を求めよ。
   (b) $\{x'\}$ 系で棒の長さを求めるためには、P'_1 と P'_2 は、同時刻でなければならない。t_1 と t_2 の関係を求めよ。
   (c) $\{x'\}$ 系で棒の長さを求めよ。

3. 双子のパラドックスについて考えて見る。双子がいて、一人 (A) は $\{x\}$ 系にずっといた。もう一人 (B) は、速さ v のロケットに乗り、距離 L の星まで旅行し、向きを変えて速さ v で帰ってきた。
   (a) B が出発して戻ってくるまでに、A の時計はどのくらい時間がかかったか。
   (b) B が出発して目的地に着くまでに、B の時計はどのくらい時間がかかった。
   (c) いつも B と一緒に運動する系からみると、A が運動しているように見える。すると、今の議論の逆が成り立つので、矛盾が生じるというのが「双子のパラドックス」というものであるが、実際にはパラドックスは起きない。理由を説明せよ。

4. 電荷 q をもった荷電粒子が一様な速度 v で z 方向に運動している。この粒子の作る電磁場をローレンツ変換を用いて計算してみる。粒子の位置を $(0, 0, vt)$ とすると電荷密度と電流密度は

$$\rho(\mathbf{r}, t) \;=\; q\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt) \tag{2}$$
$$\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \;=\; qv\mathbf{e}_z\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt) \tag{3}$$

   で与えられる。$\{x\}$ 系に対して、z 方向に v で運動する慣性系（$\{x'\}$ 系と書く）では、電荷は静止しているので、

$$\rho'(\mathbf{r}', t') \;=\; q'\delta(x')\delta(y')\delta(z') \tag{4}$$
$$\mathbf{i}'(\mathbf{r}', t') \;=\; 0 \tag{5}$$

   となるはずである。

(a) 4 元電流密度ベクトルを $i^\mu = (c\rho, \mathbf{i})$ で定義すると、これがミンコフスキー空間内での反変ベクトルとなることが知られている。このことを用いて、q' を求めよ。

(b) $\{x'\}$ 系では、電流は存在しないので、スカラーポテンシャルだけで電磁場を表すことができ、

$$\phi'(\mathbf{r}', t') = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r'} \tag{6}$$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}', t') = 0 \tag{7}$$

となる。ところで、4 元ポテンシャルを $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$ で定義すると、これもミンコフスキー空間内での反変ベクトルとなることが知られている。上記のポテンシャルから、$\{x\}$ 系でのポテンシャルを計算せよ。

(c) 最初から $\{x\}$ 系で計算した結果（第 2 回演習）と比較して一致していることを確認せよ。