『物理工学演習第一 電磁気学』第5回 (6月19日）問題

1. 平行平板コンデンサーを考える。極板は一辺が L の正方形で、間隔を d とする。

   (a) 電荷 Q を与えた時の極板間の電位差を求めよ。

   (b) その状態で誘電率 ε で厚さ d の誘電体を図に示すように端から x まで入れた。このときの電位差を求めよ。極板の電荷は一定とする。

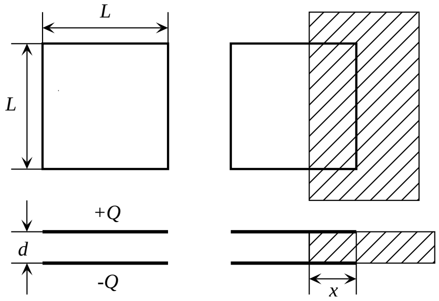
   (c) 誘電体に働く力を求めよ。

   (d) 極板間隔をすべて誘電体で満たした。まったく空の状態の時とすべて満たした状態での静電エネルギーの差 ΔU を求めよ。

   (e) この ΔU について、

   $$\Delta U = -\frac{1}{2}\int \mathbf{P}\cdot\mathbf{E}_0 \mathrm{d}V \tag{1}$$

   が成り立つことを示せ。ここで、E_0 は誘電体を入れる前の電場の強さである。



2. 平行平板コンデンサーを考える。極板の間に何も入っていないときの静電容量を C_0 とする。このコンデンサーに交流電源をつなぐ。交流電源の電圧は

   $$V_{\mathrm{s}}(t) = V_0 \cos\omega t \tag{2}$$

   である。

   (a) コンデンサーを流れる電流を求めよ。

   (b) コンデンサーで消費される電力の時間平均を計算せよ。

   (c) 極板間隔をすべて誘電体で満たした。この誘電体の複素電気感受率は

   $$\chi_{\mathrm{e}}(\omega) = \frac{\chi_0}{1+\mathrm{i}\omega\tau} \tag{3}$$

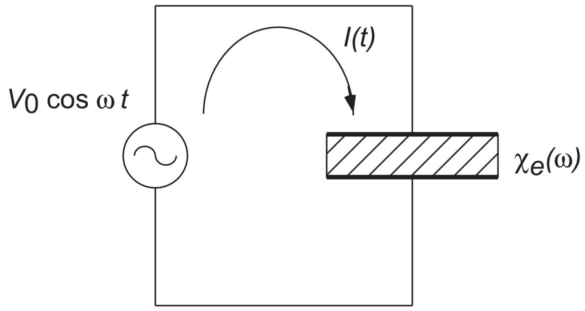
   である。

      i. コンデンサーを流れる電流を求めよ。

      ii. コンデンサーで消費される電力の時間平均を計算せよ。

      iii. コンデンサーの両端の電圧に対する電流の位相差を求め、その特徴を説明せよ。

   。



3. 等方的な誘電体中の電磁波について考える。この物質の誘電率は複素数で表され、角振動数 ω の電磁波に対しては

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - \mathrm{i}\varepsilon''(\omega) \tag{4}$$

で与えられる。また、透磁率は μ_0 としてよい。

(a) $\mathbf{E}$ の満たす方程式を書き下せ。

(b) x 方向に進む平面電磁波が

$$\mathbf{E} = E_0 \exp[\mathrm{i}\omega t - kx]\mathbf{e}_z \quad (x > 0) \tag{5}$$

と表される時、ω と k の関係を示せ。

(c) この電磁波の強度は、波の進行に伴い減少する。電磁波の強度を I で表すと、ランベルト・ベール（Lambert-Beer）の法則に従い、

$$I(x) = I_0 \exp(-\alpha x) \tag{6}$$

と変化し、α を吸収係数（吸光係数）と呼ぶ。この誘電体の α を求めよ。

4. 内径が $2a$、外径が $2b$ の磁性体球殻に一様な磁場を外部から掛けたとき、球殻の内部にできる磁場を求める。磁性体の透磁率を $\mu = \mu_0\mu_\mathrm{r}$ とする。ここでは、真電流が流れていないので、$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0$ が満たされる。そこで、$\mathbf{H} = -\,\mathrm{grad}\,\phi_\mathrm{m}$ となる磁位 ϕ_m を用いて問題を解くことにする。

(a) ϕ_m はラプラス方程式を満たすことを示せ。

(b) 解を 3 つの領域で考える。外部磁場は大きさ H_0 で z 方向を向いているとする。このとき、解の形は

$$\phi_\mathrm{m} = \begin{cases} -H_0 r\cos\theta + \frac{A}{r^2}\cos\theta & r > b \\ -Br\cos\theta + \frac{C}{r^2}\cos\theta & b > r > a \\ -Dr\cos\theta & a > r \end{cases} \tag{7}$$

である。それぞれの境界で満たすべき式を示せ（磁位が連続、磁束密度の法線成分が連続）。

(c) D は内部の磁場である。この球殻により外部の磁場がどの程度減衰したかは、$D = fH_0$ としたときの f で表される。f を計算せよ。