『物理工学演習第一 電磁気学』第 3 回 (5 月 22 日）問題

問題

1. 一様な磁場中で、放射の反作用力
$$\mathbf{F}_{\text{reac}} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^3} = m\tau_0\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^3} \tag{1}$$
が働く場合の電子の運動を考えよう。電子の質量を m、電荷を $-e$ とする。また、磁場は $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ で与えられ、電子は xy 面内でのみ運動する。
   (a) 電子の速度 v_x と v_y を用いて、電子の運動方程式を求めよ。
   (b) $\xi = v_x + \mathrm{i}v_y$ として、ξ の満たす方程式を求めよ。
   (c) その解を $\xi = \mathrm{e}^{\alpha t}$ の形で仮定し、解の性質を議論せよ。
   (d) 放射の反作用を考えない場合、電子の軌道は円運動になる。しかし、放射によりエネルギーを失う。この効果を前問の解を用いて議論せよ。
   (e) 同様の議論をラーモアの放射公式を用いて議論し、その結果を前問の場合と比較せよ。

2. 等方的な分極率 α を持つ分子を z 軸上の等間隔（間隔 a）で N 個並べる。そこに、$\mathbf{E} = E_0\cos(\omega t - kz)\mathbf{e}_x$ で表される電磁波を入射させる。
   (a) n 番目の分子の位置を $(0, 0, na)$ とする。電磁波によって誘起される双極子モーメントを求めよ。
   (b) この双極子モーメントから放射される電磁波の波動域での電場ベクトルを求めよ。
   (c) N の分子からの寄与を足し合わせて、全体で散乱される電磁波の電場ベクトルを計算せよ。ただし、原点から観測点までの距離 r については、$r \gg Na$ としてよい。
   (d) この系からの散乱波のポインティングベクトルを計算し、散乱波のエネルギーの角度分布を議論せよ。

3. 帯電していない半径 a の金属球を一様な電場中（z 方向）に置いた。このときの電場は、以下の静電ポテンシャル ϕ で表される。
$$\phi = \begin{cases} -E_0 r\cos\theta + \dfrac{A}{r} + \dfrac{B}{r^2}\cos\theta + C & r > a \\ 0 & r < a \end{cases} \tag{2}$$
ここで、θ は動径と z 軸のなす角である（$z = r\cos\theta$）。
   (a) $r = a$ で電場の接線成分が 0 という条件を書き下せ。
   (b) $r = a$ 電位が連続であるという条件を書き下せ。
   (c) 金属球が帯電していないという条件を示せ。
   (d) A、B、C を求めよ。
   (e) 今、静電場ではなく、平面電磁波を入射させる。電磁波の波長は球の半径より十分長いとする。電磁波の電場ベクトルが
$$\mathbf{E} = E_0\cos(\omega t - kx)\mathbf{e}_z \tag{3}$$
で表されるとする。このとき、金属球による散乱波の電場ベクトルを求めよ。
   (f) 金属球の散乱断面積を求めよ。

4. 導体に電流を流す場合には、最小発熱の原理が成り立つことが知られている。$\mathbf{i} = \sigma\mathbf{E}$、$\mathbf{E} = -\,\mathrm{grad}\,\phi$、および、定常電流 $\mathrm{div}\,\mathbf{i} = 0$ の条件が満たされる場合を考える。

(a) 電流密度ベクトルが $\mathbf{i}$、電気伝導度を σ とすると、導体全体での単位時間当たりの発熱は

$$W = \int \frac{\mathbf{i}^2}{\sigma}\mathrm{d}V \tag{4}$$

で与えられる。このとき、$\mathbf{i} \to \mathbf{i} + \delta\mathbf{i}$ という変分を与えたとき、発熱量の変化 δW を示せ。

(b) $\delta W > 0$ であることを示せ。

(c) σ が場所によって異なる場合、どうなるか議論せよ。