

『物理工学演習第一 電磁気学』第2回(5月8日) 問題

問題

1. z 軸上で $z = \pm a$ の点にそれぞれ点電荷 $\pm q$ を置き、 $a = a_0 \cos \omega t$ で振動させた場合に、波動域での \mathbf{E} と \mathbf{B} を最低次の近似で求めよ。両方とも q の場合はどうか。
2. 閉じた電流 ($\text{div } \mathbf{i} = 0$) の場合、スカラーポテンシャルは時間に依存しない。そこで、電磁波の放出などを考える場合は、 $\phi = 0$ と考えてよい。この時は、 $\text{div } \mathbf{A} = 0$ なので、

$$\mathbf{A} = \mu_0 \text{rot } \mathbf{\Pi}_m \quad (1)$$

$$\mathbf{i} = \text{rot } \tilde{\mathbf{M}} \quad (2)$$

を満たす、ヘルツベクトルと仮想的な磁化ベクトルを考える。

- (a) これにより、解くべき方程式は

$$\mathbf{\Pi}_m = -\tilde{\mathbf{M}} \quad (3)$$

となることを示せ。

- (b) 電場と磁場は

$$\mathbf{B} = \mu_0 \text{rot rot } \mathbf{\Pi}_m \quad (4)$$

$$\mathbf{E} = -\mu_0 \text{rot } \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t} \quad (5)$$

で計算されることを示せ。

- (c) 遅延解が

$$\mathbf{\Pi}_m = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (6)$$

で与えられるとき、角振動数 ω の正弦電磁波では、最低次の近似で、

$$\mathbf{\Pi}_m = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \int \tilde{\mathbf{M}}_\omega(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m}_\omega e^{i(\omega t - kr)}}{r} \quad (7)$$

$$\int \tilde{\mathbf{M}}_\omega(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r}' \times \mathbf{i}_\omega(\mathbf{r}')] d^3\mathbf{r}' = \mathbf{m}_\omega \quad (8)$$

となることを示せ。

- (d) 波動域での \mathbf{E} と \mathbf{B} を求めよ。

- (e) 電気双極子放射の場合に電磁波を比較してみよ。ただし、 \mathbf{p}_ω と \mathbf{m}_ω はともに、 z 成分だけを持つ仮定する。

3. 電荷 q をもった荷電粒子が一様な速度 v で z 方向に運動している。粒子の位置を $(0, 0, vt)$ とすると

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt) \quad (9)$$

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = qv\mathbf{e}_z\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt) \quad (10)$$

$$(11)$$

で与えられる。

- (a) この電荷密度と電流密度は電荷の保存則を満たすことを示せ。
- (b) 遅延ポテンシャルを用いて、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを計算せよ。
- (c) 電場ベクトルと磁束密度ベクトルを計算せよ。
- (d) ポインティングベクトルを計算せよ。
- (e) 電磁波が存在しないこと示せ。
4. 双極子放射の公式を用いて、水素原子の寿命を計算する。
- (a) 電子は近似的に円運動しているとする。円運動の半径を r として電子のもつ全エネルギー E を計算せよ。
- (b) ラーモアの放射公式を用いて、エネルギーの時間変化の割合 dE/dt を計算せよ。
- (c) 半径 r の満たすべき方程式を書き下せ。
- (d) 上記の方程式を解き、水素原子の寿命を求めよ。ただし、 $t = 0$ での半径をボーア半径とせよ。
5. 下図に示すように、質量 m の大きさの無視できる金属球を 2 個用意し、長さ $2a$ の軽くて細い絶縁体の棒でつなぐ。そして、棒の中央で、水平面内で自由に回転出来るように支持した。以下の問いに答えよ。
- (a) 片方に電荷 $+q$ を与えた状態で回転させたところ、電磁波を放出して次第に回転が遅くなった。回転の角速度が ω のとき、この系からの電磁波の放出によって単位時間あたり失われるエネルギーはどれだけか。ただし、回転の速度は十分遅く、電磁波の放射は電気双極子近似が成り立つとしてよい。
- (b) 回転の角速度の時間変化を求めよ。ただし、 $t = 0$ での角速度を Ω とする。
- (c) この変化を放射の反作用力を使って計算し、結果が一致することを示せ。
- (d) もう一つの金属球に、 $+q$ の電荷を与えた場合と $-q$ の電荷を与えた場合に、片方しか電荷が無い場合と比べて、それぞれどのような変化が現れるか説明せよ。

