

『物理工学演習第一 電磁気学』第1回(4月17日) 問題

問題

1. 以下の公式を証明せよ。

(a) $\text{div}(\phi \mathbf{A}) = \phi \text{div} \mathbf{A} + \text{grad} \phi \cdot \mathbf{A}$

(b) $\text{rot}(\phi \mathbf{A}) = \phi \text{rot} \mathbf{A} + \text{grad} \phi \times \mathbf{A}$

(c) $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \text{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{rot} \mathbf{B}$

(d) $\text{rot rot} \mathbf{A} = \text{grad}(\text{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$ (直交座標系)

2.

$$\Delta \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1)$$

を証明せよ。

3. 1次元のラプラス・ポアソン方程式

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0} \quad (2)$$

を $\phi(x) = 0$ ($x = 0, a$) という境界条件で解く場合のグリーン関数を求めて、解が

$$\phi = \frac{1}{\epsilon_0 a} \left((a-x) \int_0^x \rho(x') x' dx' + x \int_x^a \rho(x') (a-x') dx' \right) \quad (3)$$

で与えられることを示せ。

4. $\text{div} \mathbf{i} = 0$ を満たす時、

$$\int \mathbf{i}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = 0 \quad (4)$$

を示せ。

5. $\text{div} \mathbf{i} = 0$ を満たす時、

$$\int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{i}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = -\mathbf{r} \times \mathbf{m} \quad (5)$$

を示せ。ここで、 \mathbf{m} は以下で定義される磁気モーメントである。

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r}' \times \mathbf{i}(\mathbf{r}')] d^3 \mathbf{r}' \quad (6)$$

6. xy 面内にある半径 a の円電流 I の作る磁気モーメントを求めよ。

7. ある閉曲線の内部を貫く磁束は、 $\Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$ とベクトルポテンシャルで表せることを示し、この量がゲージ変換で不変であることを示せ。

8. ポテンシャルが $\phi = 0$ 、 $\mathbf{A} = (a \cos \omega t \cos kz, a \cos \omega t \sin kz, 0)$ 、 $k = \omega/c$ で表されるとき、電場と磁場を計算し、その性質を論ぜよ。