

『電磁気学第2』講義資料 No.2

【電磁波の発生】

電荷分布や電流密度を与えると、マクスウェル方程式を解くことにより電磁場を求めることができる。そして、それらが時間変動すると電磁波が発生する。

1 遅延ポテンシャル

マクスウェル方程式は、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを用い、さらにローレンツゲージを採用すると

$$\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{i} \quad (2)$$

という4つの波動方程式とゲージ条件

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (3)$$

に帰着される。この方程式の解を求めることにする。

まず、静的な場合を考えよう。静電気学では、電場はスカラーポテンシャル ϕ について、

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4)$$

を適当な境界条件で解くと全てが決まる。最も一般的な条件は、無限遠で $\phi = 0$ というものである。この時、解は点電荷によるポテンシャルの重ね合わせで

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (5)$$

で与えられる。式(5)は式(4)を満たす必要がある。そこで、式(5)の両辺に Δ を施すと

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (6)$$

を満たす必要があることがわかる。そのためには

$$\frac{1}{4\pi} \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (7)$$

となる必要がある。ここで、

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \quad (8)$$

である。これは点電荷を数学的にデルタ関数で表現したものと考えられるので、式(7)はクーロンの法則をそのまま表している。数学的には、このような関数はラプラス演算子のグリーン関数と呼ばれており、

$$\Delta G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (9)$$

を満たす。無限遠で0という境界条件では、

$$G(R) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R} \quad (10)$$

が成り立つ。ここで、 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ で、 $R = |\mathbf{R}|$ である。

このグリーン関数がわかれば、式 (4) のポアソン方程式の解は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}' \quad (11)$$

で与えられることは容易に理解できる。

したがって、波動方程式に対してもグリーン関数がわかれば解を求めることができる。波動方程式は時間も変数として含んでいるので

$$G(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') \quad (12)$$

を満たす必要がある。このとき

$$\psi = -q(\mathbf{r}, t) \quad (13)$$

の解は

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int G(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t')q(\mathbf{r}', t')d^3\mathbf{r}'dt' \quad (14)$$

で与えられる。

この波動方程式のグリーン関数はいくつか知られており、

$$G_{\text{ret}}(R, \tau) = \frac{1}{4\pi R}\delta(\tau - R/c) \quad (15)$$

$$G_{\text{adv}}(R, \tau) = \frac{1}{4\pi R}\delta(\tau + R/c) \quad (16)$$

などがあげられる ($\tau = t - t'$)。最初のは遅延グリーン関数、後のものは先進グリーン関数と呼ばれている。これを求めるための数学的な手続きはあまり易しくないが、以下のような議論でおおよそ理解できるだろう。

式 (12) の右辺のデルタ関数は $R \neq 0$ または $\tau \neq 0$ の時は 0 であるので、グリーン関数は基本的には

$G = 0$ の解である。また、無限遠で 0 になる境界条件をつけると、対称性から $G(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t') = G(R, \tau)$ となるだろう。このとき、変数を τ と $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ に取り直して計算すると

$$G = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (RG)}{\partial R^2} \quad (17)$$

となる。さらに、 $X = RG$ とすると、 X は 1 次元の波動方程式としての解として表される。すなわち

$$X(R, \tau) = f(\tau - R/c) + g(\tau + R/c) \quad (18)$$

である。 R は動径方向の距離を表すので、 f は外向きに広がる波、 g は内向きに集まる波を表す。物理的には中心の原因が外に伝わるの方が因果律を満たすので外向きの波を解とする。このとき、

$$G(R, \tau) = \frac{f(\tau - R/c)}{R} \quad (19)$$

の形になるはずである。もし、 $c \rightarrow \infty$ の極限をとると、式 (12) は

$$\Delta G(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') \quad (20)$$

となり、ラプラス方程式に帰着される。そのときは、 G もラプラス方程式のグリーン関数に比例するはずで、つまり

$$G(R, \tau) \rightarrow \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(\tau)}{R} \quad (21)$$

を満たす必要がある。そのためには

$$f(\tau) = \frac{\delta(\tau)}{4\pi} \quad (22)$$

という解が適当である。これを代入すると、式 (15) の遅延グリーン関数が得られる。もし、出発点を内向きの解をとれば、同様な手順で式 (16) の先進グリーン関数が得られる¹。この遅延グリーン関数を用いて、非斉次の波動方程式の解を書き下すと、式 (14) の t' の積分は容易に実行できて、

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{q(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (24)$$

となる。このような解を遅延解という。ポテンシャルについての波動方程式についていえば、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (25)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (26)$$

と書くことができる。これを遅延ポテンシャルと呼んでいる。

2 ヘルツベクトル

電磁場の場合に、さらに具体的な計算をしよう。そのための準備として、ヘルツベクトルを導入する。求めるべきは解は式 (1) および、式 (2) の 4 つの波動方程式の解であるが式 (3) のゲージ条件を満たす必要があるので、独立な成分は 3 つである。そこで、

$$\mathbf{A} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} \quad (27)$$

$$\phi = -\text{div } \mathbf{\Pi} \quad (28)$$

とおけば、自動的にゲージ条件を満たすことができる。さらに、電荷の保存法則があるので、

$$\mathbf{i} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}}{\partial t} \quad (29)$$

$$\rho = -\text{div } \tilde{\mathbf{P}} \quad (30)$$

を満たすような仮想的な分極ベクトル $\tilde{\mathbf{P}}$ を考える。これらを使うと、マックスウェル方程式は

$$\mathbf{\Pi} = -\frac{\tilde{\mathbf{P}}}{\epsilon_0} \quad (31)$$

と書くことができる。この $\mathbf{\Pi}$ をヘルツベクトルという。これから電場、磁場を計算すると

$$\mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0 \text{rot } \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} \quad (32)$$

$$\mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{\Pi} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = \text{rot rot } \mathbf{\Pi} - \frac{\tilde{\mathbf{P}}}{\epsilon_0} \quad (33)$$

である。そして、遅延ポテンシャルを使うと解は

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (34)$$

¹一般に

$$G(R, \tau) = AG_{\text{ret}}(R, \tau) + BG_{\text{adv}}(R, \tau) \quad (A + B = 1) \quad (23)$$

は、グリーン関数となる。

と書くことができる。

ヘルツベクトルには、もう一種類ある。電流密度が $\text{div } \mathbf{i} = 0$ を満たす場合である。この場合は、電荷の保存則から電荷密度の時間変化はなくなるので、スカラーポテンシャルは時間に依存しない。そこで、電磁波の放出などを考える場合は、 $\phi = 0$ と考えてよい。この時は、 $\text{div } \mathbf{A} = 0$ なので、

$$\mathbf{A} = \mu_0 \text{rot } \mathbf{\Pi}_m \quad (35)$$

$$\mathbf{i} = \text{rot } \tilde{\mathbf{M}} \quad (36)$$

を満たす、ヘルツベクトルと仮想的な磁化ベクトルを考える。これにより、解くべき方程式は

$$\mathbf{\Pi}_m = -\tilde{\mathbf{M}} \quad (37)$$

となり、

$$\mathbf{\Pi}_m = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (38)$$

で解が与えられる。電場と磁場は

$$\mathbf{B} = \mu_0 \text{rot rot } \mathbf{\Pi}_m \quad (39)$$

$$\mathbf{E} = -\mu_0 \text{rot } \frac{\partial \mathbf{\Pi}_m}{\partial t} \quad (40)$$

で計算される。円電流のような電荷密度が変化しない場合の計算はこちらの方が向いてる。

3 多重極放射

式 (34) を多重極展開する。今、時間変動は正弦的としよう。すなわち

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}', t) = \tilde{\mathbf{P}}_\omega(\mathbf{r}') e^{i\omega t} \quad (41)$$

で分極が表されるとする²。すると式 (34) は

$$\mathbf{\Pi}_\omega(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{i\omega t}}{4\pi\epsilon_0} \int \tilde{\mathbf{P}}_\omega(\mathbf{r}') \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (k = \omega/c) \quad (44)$$

となる。さらに、問題としている電磁波の波長に比べて、電磁波を出す源の大きさが十分小さい時を考えよう。その場合、 $x = kr$ 、 $y = kr'$ とし、 $y \ll 1$ として展開すると、

$$\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{e^{-i\zeta}}{\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left(\frac{e^{-i\zeta}}{\zeta} \right) \Big|_{y=0} \frac{y^n}{n!} \quad (45)$$

となる。ここで、 $\zeta = k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{x^2 - 2xy \cos \chi + y^2}$ である。静的な場の場合は、 $r'/r \ll 1$ という条件の展開であったが、この展開式は、 $y = kr'$ だから（波源の大きさ / 電磁波の波長）を展開のパラメータにしたものであることがわかる。この級数展開をおこなって、各次数ごとに積分を行う。

²もし、正弦的な変化でない場合はフーリエ変換を使って、

$$\tilde{\mathbf{P}}_\omega(\mathbf{r}') = \int \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}', t) e^{-i\omega t} dt \quad (42)$$

として考える。また、この逆変換は

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}', t) = \int \tilde{\mathbf{P}}_\omega(\mathbf{r}') e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (43)$$

である。

3.1 双極子放射

まず、式 (45) で $n = 0$ の場合を考えてみよう。この時は、

$$\frac{e^{-i\zeta}}{\zeta} \Big|_{y=0} = \frac{e^{-ix}}{x} \quad (46)$$

であるから

$$\mathbf{\Pi}_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \int \tilde{\mathbf{P}}_{\omega}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (47)$$

となる。ここで、

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial x'^j \tilde{P}_{\omega}^i}{\partial x'^i} = \sum_{i=1}^3 \left(\delta_{ij} \tilde{P}_{\omega}^i + x'^j \frac{\partial \tilde{P}_{\omega}^i}{\partial x'^i} \right) = \tilde{P}_{\omega}^j + x'^j \operatorname{div} \tilde{\mathbf{P}}_{\omega} \quad (48)$$

で、さらに $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{P}} = -\rho$ を使うと

$$\int \tilde{P}_{\omega}^j(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \int \left(\rho_{\omega} x'^j + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x'^j \tilde{P}_{\omega}^i}{\partial x'^i} \right) d^3\mathbf{r}' \quad (49)$$

と書ける。そして、右辺の括弧内の第 2 項は表面積分に変換でき、十分大きな領域をとれば 0 になるので、

$$\int \tilde{\mathbf{P}}_{\omega}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \int \mathbf{r}' \rho_{\omega}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \mathbf{p}_{\omega} \quad (50)$$

と双極子モーメントの時間変化の ω 成分によって表すことができる。すなわち、

$$\mathbf{\Pi}_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{p}_{\omega}}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \quad (51)$$

となる。通常の放射は双極子モーメントの時間変化による項が大きいのである。電磁波源の外では $\tilde{\mathbf{P}} = 0$ だから、

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{\Pi} \quad (52)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} \quad (53)$$

により、 \mathbf{E} と \mathbf{B} の計算ができる。今、

$$\mathbf{\Pi}_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{C}(t) f(r) \quad \left(\mathbf{C}(t) = \frac{\mathbf{p}_{\omega} e^{i\omega t}}{4\pi\epsilon_0}, \quad f(r) = \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \quad (54)$$

書けるので、

$$\operatorname{rot} \mathbf{\Pi}_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{C} \times \operatorname{grad} f = (\mathbf{r} \times \mathbf{C}) \left(\frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) \quad (55)$$

であり、

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}_{\omega}^{(0)} = \operatorname{rot} \left((\mathbf{r} \times \mathbf{C}) \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) = \left(\frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) \operatorname{rot} (\mathbf{r} \times \mathbf{C}) - [(\mathbf{r} \times \mathbf{C}) \times \mathbf{r}] \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) \right) \quad (56)$$

と書ける。そして、

$$\operatorname{rot} (\mathbf{r} \times \mathbf{C}) = -2\mathbf{C} \quad (57)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{C}) = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} \quad (58)$$

$$\frac{df}{dr} = -\frac{1 + ikr}{r^2} e^{-ikr} \quad (59)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) = \frac{3(1 + ikr) - k^2 r^2}{r^4} e^{-ikr} \quad (60)$$

等の関係式を用いる。ここで、 $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ とした。これらを整理して、

$$\mathbf{E}_\omega^{(0)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^{i(\omega t - kr)} \left[\frac{(1 + ikr)}{r^3} [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_\omega) - \mathbf{p}_\omega] - [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{p}_\omega)] \frac{k^2}{r} \right] \quad (61)$$

$$\mathbf{B}_\omega^{(0)} = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} e^{i(\omega t - kr)} \left(\frac{1 + ikr}{r^2} \right) (\mathbf{n} \times \mathbf{p}_\omega) \quad (62)$$

となる。 $kr \gg 1$ の条件を満たす波動域では

$$\mathbf{E}_\omega^{(0)} \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^{i(\omega t - kr)} \frac{k^2}{r} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{p}_\omega)] \quad (63)$$

$$\mathbf{B}_\omega^{(0)} \approx \frac{c\mu_0}{4\pi} e^{i(\omega t - kr)} \frac{k^2}{r} (\mathbf{n} \times \mathbf{p}_\omega) \quad (64)$$

と、 $1/r$ で振幅が小さくなる球面波を表している。そして、動径 (\mathbf{n}) の方向の成分はなく、電場と磁場は直交している。

ここで、ポインティングベクトルを計算してみよう。この場合は、複素表示では計算ができないので、

$$\mathbf{S}_\omega^{(0)} = [\text{Re}(\mathbf{E}_\omega^{(0)}) \times \text{Re}(\mathbf{B}_\omega^{(0)})] / \mu_0 \quad (65)$$

と、実部を取ってから計算する必要がある。一般に $\alpha = ae^{i\omega t}$ と $\beta = be^{i\omega t}$ という量の積の時間平均を考える場合 ($-$ は時間平均を意味する)

$$\overline{\text{Re}(ae^{i\omega t})\text{Re}(be^{i\omega t})} = \overline{\left(\frac{ae^{i\omega t} + a^*e^{-i\omega t}}{2} \right) \left(\frac{be^{i\omega t} + b^*e^{-i\omega t}}{2} \right)} = \frac{ab^* + ba^*}{4} = \frac{1}{2} \text{Re}(\alpha\beta^*) \quad (66)$$

とすればよいから、同様の計算を行うと

$$\overline{\mathbf{S}}_\omega^{(0)} = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{\omega^4}{r^2} (\mathbf{p}_\omega \cdot \mathbf{p}_\omega^* - |\mathbf{p}_\omega \cdot \mathbf{n}|^2) \mathbf{n} \quad (67)$$

と動径方向で外向きになる。いま、 \mathbf{p}_ω と \mathbf{n} の角度を θ とすれば、

$$\overline{\mathbf{S}}_\omega^{(0)} = \frac{|\mathbf{p}_\omega|^2}{32\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{\omega^4}{r^2} \sin^2 \theta \mathbf{n} \quad (|\mathbf{p}_\omega|^2 = \mathbf{p}_\omega \cdot \mathbf{p}_\omega^*) \quad (68)$$

となり、 $\theta = \pi/2$ の方向、すなわち双極子と直交する方向に強く電磁波が放出されることが分かる。放出される全パワーは

$$W = \int \overline{\mathbf{S}}_\omega^{(0)} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{|\mathbf{p}_\omega|^2 \omega^4}{16\pi\epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 |\mathbf{p}_\omega|^2}{12\pi c} \omega^4 \quad (69)$$

逆に、 $kr \ll 1$ の領域での場 (近傍場) を調べる。例えば、式 (62) で、指数関数を kr のべきで展開すると

$$\mathbf{B}_\omega^{(0)} \approx -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} e^{i\omega t} \left(\frac{1 + (kr)^2/2 - i(kr)^3/3}{r^2} \right) (\mathbf{n} \times \mathbf{p}_\omega) \quad (70)$$

となる。この式の意味するところは、近傍場では、距離 r の点での位相の遅れが kr ではなく、 $(kr)^3/3$ で与えられるという点である。つまり、近傍場の位相変化の伝播速度は光速より早くなるということである。実際に位相速度が光速度を超えることは許される。エネルギーや情報が伝達される速度は光速以下でなければならないのである。

波動域では位相の遅れは光速度で決まっている。これは波動域での場の変化はエネルギーを運んでいるからである。

なお、波動域での場 ($1/r$ に比例する項) を求めるだけならば、空間的な微分演算子は、指数関数 $\exp(-ikr)$ の引数の部分に含まれる r に対してのみ行えばよい。従って、

$$\nabla \rightarrow -ik\mathbf{n} \quad (71)$$

という置き換えを行うことで、場を計算できる。

また、逆フーリエ変換を行って、時間領域での表示を得ることもできる。

$$\mathbf{p}(t) = \int \mathbf{p}_\omega e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (72)$$

である。従って、

$$\mathbf{\Pi}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{p}(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (73)$$

と書ける。ここで、 $k = \omega/c$ という関係を用い、指数関数の引数が $\exp(i\omega t - ikr) = \exp i\omega(t - r/c)$ となることを考慮した。これを用いると、

$$\phi(\mathbf{r}, t) = -\text{div } \mathbf{\Pi}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}(t - r/c)}{r^3} + \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{cr^2} \right) \quad (74)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mu_0\epsilon_0 \frac{\mathbf{\Pi}^{(0)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\mu_0 \dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{4\pi r} \quad (75)$$

が得られる。これらを電気双極子近似のスカラーポテンシャル、ベクトルポテンシャルという³。

次に、波動域での電場を考える。この場合には、式 (63) を逆フーリエ変換して、時間領域の表現を求める方が簡単で

$$\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{E}_\omega^{(0)} \frac{d\omega}{2\pi} \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \int e^{i(\omega t - kr)} \omega^2 [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{p}_\omega)] \frac{d\omega}{2\pi} \quad (76)$$

となる。そして、

$$\mathbf{p}''(t) = - \int \omega^2 \mathbf{p}_\omega e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (77)$$

という関係式を用いると

$$\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} (\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{p}}(t - r/c)]) \quad (78)$$

が得られる。波動域では

$$\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}/c \quad (79)$$

かつ、 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0$ なので、ポインティングベクトルは

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 c} [\mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E})] = \frac{|\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}, t)|^2}{\mu_0 c} \mathbf{n} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} [|\ddot{\mathbf{p}}(t - r/c)|^2 - (\ddot{\mathbf{p}}(t - r/c) \cdot \mathbf{n})^2] \mathbf{n} \quad (80)$$

である。全立体角で積分して、放出されるエネルギーを求めると

$$W = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}(t - r/c)|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{\mu_0 |\ddot{\mathbf{p}}(t - r/c)|^2}{6\pi c} \quad (81)$$

となる。電荷 e を持つ荷電粒子の軌道が $\xi(t)$ 与えられているとき、双極子モーメントは $\mathbf{p} = e\xi$ で与えられる。従って $\ddot{\mathbf{p}} = e\ddot{\xi}$ であるから、

$$W = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} |\ddot{\xi}(t - r/c)|^2 \quad (82)$$

である。この公式をラーモアの輻射公式という。

³通常、電気双極子近似のスカラーポテンシャルには、 $Q/(4\pi\epsilon_0 r)$ という項が付け加わるが、この項は時間的に変化しないので電磁波の発生を議論するときには不要である。

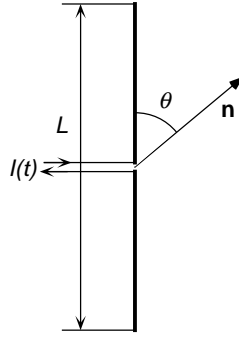


図 1: アンテナからの放射

4 アンテナからの放射

次は、アンテナからの放射を考えよう。一番簡単なアンテナのモデルは、図 1 のように z 方向に長さ $L/2$ の導線を 2 本はり (アンテナ全体では長さ L)、中心部から振動電流を供給するものである。この時は $i_x = i_y = 0$ で、さらに $z = \pm L/2$ では $i_z = 0$ でなければならないという条件を考慮して

$$i_z = I_0 e^{i\omega t} \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \delta(x) \delta(y) \quad (83)$$

と仮定しよう⁴。すると、ヘルツベクトルは $\Pi_x = \Pi_y = 0$ で、かつ、 $i_z = i\omega \tilde{P}_z$ を用いると

$$\Pi_z = \frac{I_0}{4\pi\epsilon_0(i\omega)} \int \frac{\exp[i\omega(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cos\left(\frac{\pi z'}{L}\right) \delta(x') \delta(y') d^3 \mathbf{r}' \quad (85)$$

で与えられる。

十分遠方での電磁波を考えることにすると、

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \quad (86)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} \quad (87)$$

としてよい。したがって、

$$\Pi_z = \frac{I_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{4\pi\epsilon_0(i\omega)r} \int_{-L/2}^{L/2} e^{ik_z z'} \cos\left(\frac{\pi z'}{L}\right) dz' \quad (88)$$

となる。ここで、 $k_z = (\omega/c)z/r = k \cos \theta$ である。この積分は簡単に実行できて、

$$\Pi_z = \frac{I_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{4\pi\epsilon_0(i\omega)r} \frac{(2\pi L) \cos(k_z L/2)}{(\pi)^2 - (k_z L)^2} \quad (89)$$

となる。さらに、アンテナの長さを電磁波の半波長にとると、 $kL = \pi$ となる。これを代入すると

$$\Pi_z = -\frac{iI_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{2\pi\epsilon_0 c k^2 r} \left[\frac{\cos(\pi \cos \theta/2)}{\sin^2 \theta} \right] \quad (90)$$

⁴一般には

$$i_z \propto \begin{cases} \cos(\pi(2n-1)z/L) \\ \sin(2\pi n z/L) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3\dots) \quad (84)$$

とすれば満たされる。

が得られる。この式から、波動域での電場を計算する場合は、

$$\mathbf{E} = -k^2[\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_z)]\Pi_z \quad (91)$$

であるが、極座標での基底ベクトルを用いると

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_z) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z)\mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{e}_z = \cos\theta \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_z = \sin\theta \mathbf{e}_\theta \quad (\mathbf{n} = \mathbf{e}_r) \quad (92)$$

なので、

$$E_\theta = \frac{iI_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{2\pi\epsilon_0 cr} \left[\frac{\cos(\pi \cos\theta/2)}{\sin\theta} \right] \quad (93)$$

である。これを使って、ポインティングベクトルの平均値を計算すると

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{|E_\theta|^2}{2c\mu_0} \mathbf{n} = \frac{I_0^2}{8\pi^2\epsilon_0 cr^2} \left[\frac{\cos(\pi \cos\theta/2)}{\sin\theta} \right]^2 \mathbf{n} \quad (94)$$

これは、 \mathbf{n} の方向に放出されるエネルギー分布を与えている。その強度分布を図 2 に示す。そして、これを半径 r の球面上で積分すると、アンテナから放出される単位時間当たりの全エネルギーが求まり、

$$W = \int r^2 \frac{|E_\theta|^2}{2c\mu_0} 2\pi \sin\theta d\theta = \frac{I_0^2}{4\pi\epsilon_0 c} \Lambda_1 \quad (95)$$

$$\Lambda_1 = \int_0^\pi \frac{\cos^2(\pi \cos\theta/2)}{\sin\theta} d\theta \quad (96)$$

となる。この時、 $W = R_r I_0^2 / 2$ として、 R_r をアンテナの放射抵抗という。そして、このアンテナの場合には

$$R_r = \frac{\Lambda_1}{2\pi\epsilon_0 c} = \frac{\Lambda_1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 73.1\Omega \quad (97)$$

である⁵。

このアンテナの電磁波の放射の強度分布は双極子放射の強度分布と似ている。しかし、この場合は電磁波を発生する物体の大きさが電磁波の波長と同程度なので簡単な双極子近似では計算ができない。この違いは、高い次数の電流分布を与えると顕著になる。たとえば、

$$i_z = I_0 e^{i\omega t} \cos\left(\frac{3\pi z}{L}\right) \delta(x)\delta(y) \quad (99)$$

の場合、 $kL = 3\pi$ として

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{I_0^2}{8\pi^2\epsilon_0 cr^2} \left[\frac{\cos(3\pi \cos\theta/2)}{\sin\theta} \right]^2 \mathbf{n} \quad (100)$$

である。これを図示すると図 3 のように複雑な指向性を示す事が分かる。また、この時の放射抵抗は、105.5Ω となる。

5 放射の反作用

荷電粒子が加速度運動をすると、電磁波を放出してエネルギーを失う。これは、放射を行うことによる反作用を受けていると考えることができる。この問題の厳密な議論は難しい問題を含んでいるが [2]、限ら

⁵ Λ_1 を求める積分は数値的に行うと

$$\Lambda_1 = \int_0^\pi \frac{\cos^2(\pi \cos\theta/2)}{\sin\theta} d\theta = 1.21883 \quad (98)$$

である。

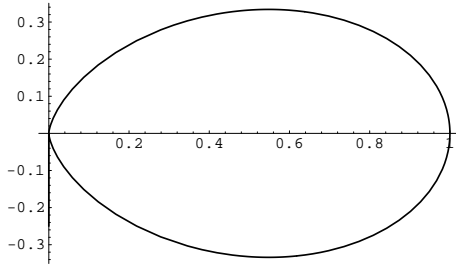


図 2: 半波長 ($L = \lambda/2$) アンテナの放射の強度分布

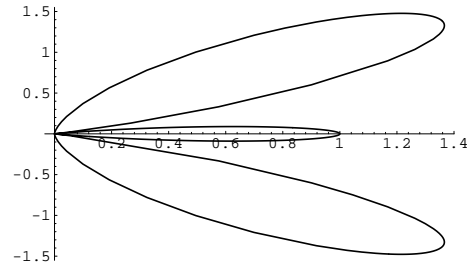


図 3: $L = 3\lambda/2$ のアンテナからの放射の強度分布

れた条件の下では、反作用の大きさを議論できる。その出発点をラーモアの放射公式にとる。この公式を使うと、荷電粒子が単位時間当たり放出するエネルギーは

$$\Delta E = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right|^2 dt = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left[\frac{d^2 \xi}{dt^2} \cdot \frac{d\xi}{dt} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^3 \xi}{dt^3} \cdot \frac{d\xi}{dt} dt \quad (101)$$

となるが、右辺の第 1 項は運動が周期的な場合や有界な場合は無視できるようになる。第 2 項は

$$\mathbf{F}_{\text{reac}} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d^3 \xi}{dt^3} \quad (102)$$

という外力に対する仕事になる。つまり、 \mathbf{F}_{reac} を電磁波放出に伴う反作用力と考えることができるのである。しかし、変位の 3 階微分に比例する力を入れた運動方程式

$$m \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \tau_0 \frac{d^3 \xi}{dt^3} \right) = \mathbf{F} \quad (103)$$

$$\tau_0 = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \quad (104)$$

は、普通に解くと非現実的な解を持つ。また、初期条件に位置と速度以外の情報を与えないと解けない。例えば、式 (103) で $\mathbf{F} = 0$ の場合でも

$$\xi = \mathbf{A}_0 e^{t/\tau_0} + \mathbf{V}t + \xi_0 \quad (105)$$

という解があり、時刻と共に発散する項が含まれる。そこで初期条件で $\mathbf{A}_0 = 0$ という条件をつけて、非現実的な解を排除するという操作が必要になる。これが、この取扱い方法の限界を示している。

補遺

A 静電場と多重極展開

式 (5) の積分を考えよう。今、電荷の広がりよりも十分遠いところから観測する場合を考えよう。すなわち、 $r \gg r'$ の場合を考える。

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \quad (106)$$

だから、 $x' = y' = z' = 0$ の周りで、テーラー展開すると、

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{r} \right) x'^i + \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{r} \right) x'^i x'^j \dots \quad (107)$$

$$= \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^3 \frac{x^i x'^i}{r^3} + \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2r^5} (3x^i x^j - r^2 \delta_{ij}) x'^i x'^j + \dots \quad (108)$$

$$= \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^3 \frac{x^i x'^i}{r^3} + \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2r^5} x^i x^j (3x'^i x'^j - r'^2 \delta_{ij}) + \dots \quad (109)$$

となる。従って、式 (5) の積分を実行すると

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \sum_{i=1}^3 \frac{x^i p^i}{r^3} + \sum_{i,j=1}^3 \frac{x^i x^j D^{ij}}{2r^5} + \dots \right) \quad (110)$$

と良く知られた展開形式になる。ここで、

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (111)$$

$$p^i = \int \rho(\mathbf{r}') x'^i d^3 \mathbf{r}' \quad (112)$$

$$D^{ij} = \int \rho(\mathbf{r}') (3x'^i x'^j - \delta_{ij} r'^2) d^3 \mathbf{r}' \quad (113)$$

で、全電荷、双極子モーメント、電気 4 重極モーメント⁶である。

このような展開による各項は、展開の次数が大きくなるにしたがって、遠方で急速に小さくなる。

B 電気 4 重極放射と磁気双極子放射

双極子放射の次の項を計算するため、式 (45) で $n = 1$ の場合を考える。すると、

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{-i\zeta}}{\zeta} \right|_{y=0} = e^{-ix} \left(\frac{i}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \cos \chi \quad (114)$$

である。したがって、

$$\mathbf{\Pi}_\omega^{(1)}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1 + ikr}{r^2} \right) \int r' \cos \chi \tilde{\mathbf{P}}_\omega(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (115)$$

となる。また、 $r' \cos \chi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'$ であるから、

$$\int r' \cos \chi \tilde{\mathbf{P}}_\omega(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = \int (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \tilde{\mathbf{P}}_\omega(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (116)$$

と書ける。ここで、成分を見ると

$$\{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \tilde{\mathbf{P}}_\omega\}^j = \sum_{i=1}^3 n^i x'^i \tilde{P}_\omega^j \quad (117)$$

となっているので、これは \mathbf{n} と $x'^i \tilde{P}_\omega^j$ を成分に持つテンソルの縮約の形をしている。そこで、このテンソルを対称成分と反対称成分に分ける。つまり、

$$x'^i \tilde{P}_\omega^j = \frac{x'^i \tilde{P}_\omega^j + x'^j \tilde{P}_\omega^i}{2} + \frac{x'^i \tilde{P}_\omega^j - x'^j \tilde{P}_\omega^i}{2} \quad (118)$$

⁶教科書によっては、 $\int \rho(\mathbf{r}') (x'^i x'^j - \delta_{ij} r'^2/3) d^3 \mathbf{r}'$ を定義としているものもある。

とする。まず、先に反対称成分と \mathbf{n} の縮約を考えよう。 j 番目の成分は

$$\sum_{i=1}^3 n^i (x'^i \tilde{P}_\omega^j - x'^j \tilde{P}_\omega^i) = \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \tilde{\mathbf{P}}_\omega - (\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{P}}_\omega) \mathbf{r}'\}^j = -\{\mathbf{n} \times (\mathbf{r}' \times \tilde{\mathbf{P}}_\omega)\}^j \quad (119)$$

と書ける。これを積分する時、 $\mathbf{i}_\omega = i\omega \tilde{\mathbf{P}}_\omega$ を使い、磁気モーメント \mathbf{m}_ω の定義、

$$\mathbf{m}_\omega = \frac{1}{2} \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{i}_\omega) d^3 \mathbf{r}' \quad (120)$$

を用いる。すると、

$$\frac{1}{2} \int \sum_{i=1}^3 n^i (x'^i \tilde{P}_\omega^j - x'^j \tilde{P}_\omega^i) d^3 \mathbf{r}' = -\frac{\{\mathbf{n} \times \mathbf{m}_\omega\}^j}{i\omega} \quad (121)$$

とまとめることができる。

対称な成分は、 $n = 0$ の場合と同じように、

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial x'^i x'^j \tilde{P}_\omega^k}{\partial x'^k} = x'^i \tilde{P}_\omega^j + x'^j \tilde{P}_\omega^i + x'^i x'^j \operatorname{div} \tilde{\mathbf{P}}_\omega \quad (122)$$

という変換を行い、表面積分に変換できる項を除くと、

$$\int (x'^i \tilde{P}_\omega^j + x'^j \tilde{P}_\omega^i) d^3 \mathbf{r}' = \int x'^i x'^j \rho_\omega(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (123)$$

となる。電場や磁場を計算する場合は、 rot の演算が入るが、全体が $\mathbf{n}F(r)$ という形のベクトルは rot 演算で 0 になるので式 (123) のテンソルのトレースが 0 になるような形を作ると、

$$D_\omega^{ij} = \int (3x'^i x'^j - \delta_{ij} r'^2) \rho_\omega(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (124)$$

という 4 重極モーメントの時間変化の ω 成分を用いることができる。これらをまとめて

$$\Pi_\omega^{(1)}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{ikr^2} \right) \left(\frac{ik}{6} \mathbf{D}_\omega \cdot \mathbf{n} - \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{m}_\omega)}{c} \right) \quad (125)$$

と書ける。第 1 項は電気 4 重極放射、第 2 項は磁気双極子放射と呼ばれている。もし、電気双極子の時間変化がない場合には、これらの項の寄与が支配的になる。

参考文献

- [1] 平川浩正：「電気力学」(培風館、1973 年)。
- [2] 砂川重信：「理論電磁気学」第 2 版(紀伊国屋書店、1973 年)。

問題

1. ヘルムホルツ方程式のグリーン関数は

$$(\Delta + k^2)G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (126)$$

を満たす。無限遠で 0 の境界条件では

$$G(R) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ikR}}{R} \quad (127)$$

であることを示せ。

2. 静的な場では、ベクトルポテンシャルが

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (128)$$

で与えられるので、式 (128) を多重極展開し、

$$\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{i}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = 0, \quad \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{i}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (129)$$

となることを示せ。ここで、

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r}' \times \mathbf{i}(\mathbf{r}')] d^3\mathbf{r}' \quad (130)$$

で定義される磁気モーメントである。

3. 3次元空間での完全反対称テンソルを

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \{ijk\} = \{123\}, \{231\}, \{312\} \\ -1 & \{ijk\} = \{132\}, \{213\}, \{321\} \\ 0 & \text{others} \end{cases} \quad (131)$$

で定義すると、

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A^j B^k, \quad (\text{rot } \mathbf{A})^i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial A^k}{\partial x^j} \quad (132)$$

となる。そこで、

$$\sum_{j,k,l,m=1}^3 \frac{\partial \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} x^k A^m}{\partial x^l} = 2A^i - (\mathbf{r} \times \text{rot } \mathbf{A})^i \quad (133)$$

を証明せよ。

4. 前問の結果を用い、式 (38) で、 $\tilde{\mathbf{M}}$ が正弦的に変化している時、多重極展開の最低次の項は、磁気双極子放射であることを示せ。
5. 式 (125) のヘルツベクトルから、電気 4 重極放射、磁気双極子放射の波動域での電場、磁場を求め、式 (79) が成り立つことを示せ。また、それぞれの場合で、放出されるエネルギーを求めよ。
6. z 軸上で $z = a$ の点に点電荷 q を置いたときの静電ポテンシャルを、原点を基準にして多重極展開し、電気四重極のオーダーまで求めよ。
7. z 軸上で $z = \pm a$ の点にそれぞれ点電荷 $\pm q$ を置き、 $a = a_0 \cos \omega t$ で振動させた場合に、発生する電磁波を最低次の近似で求めよ。両方とも q の場合はどうか。
8. $x - y$ 面内で半径 a の一定な円電流 I ($+z$ から見て右回り) が流れているとき、ベクトルポテンシャルを最低次の近似で求めよ。また、電流が $I = I_0 \cos \omega t$ のように変化するとき、発生する電磁波を最低次の近似で求めよ。
9. $x - y$ 面内、 $x = \pm a, y = 0$ の点に q 、 $x = 0, y = \pm a$ の点に $-q$ の点電荷を置いたときの、静電ポテンシャルを最低次の近似で求めよ。この電荷配置を角速度 ω で回転させたとき、発生する電磁波を最低次の近似で求めよ。また、配置する電荷を全て q にした場合はどうか。
10. 式 (100) を導け。
11. 電子に対して、式 (104) の τ_0 を計算せよ。

12. 式 (103) で、運動が一次元の場合を考える。外力として $F_{\text{ext}} = eE_0 \cos \omega t$ の場合の解を求めよ。ただし、条件は $E_0 = 0$ ならば、 $\xi = 0$ となるような解を求めよ。さらに、この場合に外力がする仕事の平均値を計算し、ラーモアの公式で計算される電磁波のエネルギーに等しいことを示せ。
13. 式 (103) で、 $F_{\text{ext}} = eE_0$ という一定の外力の場合はどうか。