『電磁気学第２』講義資料 No.2 問題解答

1.

$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2\,\mathrm{grad}\,f \cdot \mathrm{grad}\,g + g\Delta f \tag{1}$$

である。$f = 1/(4\pi R)$、$g = \exp(\pm \mathrm{i}kR)$ として、

$$\Delta\left(\frac{1}{4\pi R}\right) = -\delta(\mathbf{R}) \tag{2}$$

を用いると証明できる。

2. 静的なので電荷密度の時間微分も 0 であるから、$\mathrm{div}\,\mathbf{i} = 0$ である。

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^3} + ... \tag{3}$$

だから、第 1 項は

$$\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int \mathbf{i}(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{4}$$

となるが、$\mathrm{div}\,\mathbf{i} = 0$ を用いると

$$\int i^k(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}' = \int\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial(x'^k i^j)}{\partial x'^j} - x'^k\,\mathrm{div}\,\mathbf{i}\right)\mathrm{d}^3\mathbf{r}' = 0 \tag{5}$$

で、右辺の第 1 項は表面積分に置き換えると 0 となる。だから、$\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}) = 0$ である。次は、

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{i}(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{6}$$

であるが、

$$\sum_{k=1}^{3} x^k x'^k i^j = \sum_{k=1}^{3}\frac{x^k}{2}(x'^k i^j + x'^j i^k) + \sum_{k=1}^{3}\frac{x^k}{2}(x'^k i^j - x'^j i^k) \tag{7}$$

と書き直し、第 1 項は

$$x'^k i^j + x'^j i^k = \sum_{m=1}^{3}\frac{\partial(x'^j x'^k i^m)}{\partial x'^m} - x'^j x'^k\,\mathrm{div}\,\mathbf{i} \tag{8}$$

という計算をし、表面積分を落とすと 0 になる。第 2 項は

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{x^k}{2}(x'^k i^j - x'^j i^k) = -\frac{\mathbf{r}\times(\mathbf{r}'\times\mathbf{i})}{2} \tag{9}$$

となるから、積分を実行すると

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3} \tag{10}$$

と書ける。

3.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,k,l,m=1}^{3}\frac{\partial\epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}x^k A^m}{\partial x^l} = \sum_{j,k,l,m=1}^{3}\left(\epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}A^m\frac{\partial x^k}{\partial x^l} + \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}x^k\frac{\partial A^m}{\partial x^l}\right) \\
=&\ \sum_{j,k,l,m=1}^{3}\left(\epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}A^m\delta_{kl} + \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}x^k\frac{\partial A^m}{\partial x^l}\right) = \sum_{j,l,m=1}^{3}\epsilon_{ijl}\epsilon_{jlm}A^m + \sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}x^k(\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^j \\
=&\ 2A^i - (\mathbf{r}\times\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^i
\end{aligned} \tag{11}$$

である。ここで、

$$\sum_{j,l=1}^{3}\epsilon_{ijl}\epsilon_{jlm}=\sum_{j,l=1}^{3}\epsilon_{ijl}\epsilon_{mjl}=2\delta_{im} \tag{12}$$

を用いた。

4. 電気的なヘルツベクトルと同じように近似を行うと、最低次の近似で

$$\mathbf{\Pi}_{\mathrm{m}\ \omega}^{(0)}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kr)}}{r}\int\tilde{\mathbf{M}}_{\omega}(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{13}$$

が得られる。前問の結果を用いると

$$\int\tilde{M}_{\omega}^{i}(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}'=\int\frac{1}{2}\left(\sum_{j,k,l,m=1}^{3}\frac{\partial\epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}x'^{k}\tilde{M}_{\omega}^{m}}{\partial x'^{l}}+(\mathbf{r}'\times\ \mathrm{rot}\,\tilde{\mathbf{M}}_{\omega})^{i}\right)\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{14}$$

右辺の第 1 項は表面積分に変換して 0 とし、第 2 項は $\mathbf{i}_{\omega}=\mathrm{rot}\,\tilde{\mathbf{M}}_{\omega}$ を用い、磁気モーメントの定義

$$\mathbf{m}_{\omega}=\frac{1}{2}\int(\mathbf{r}'\times\mathbf{i}_{\omega})\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{15}$$

を使うと

$$\mathbf{\Pi}_{\mathrm{m}\ \omega}^{(0)}(\mathbf{r},t)=\frac{\mathbf{m}_{\omega}}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kr)}}{r} \tag{16}$$

が得られる。この結果を用いて、電場を計算すると

$$\mathbf{E}=-\mu_0\,\mathrm{rot}\,\frac{\partial\mathbf{\Pi}_{\mathrm{m}}}{\partial t}\approx=-\frac{\mu_0 ck^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kr)}}{4\pi r}(\mathbf{n}\times\mathbf{m}_{\omega}) \tag{17}$$

となり、磁気双極子放射を表す。

5. 波動域での計算では、$\nabla\to-\mathrm{i}k\mathbf{n}$ で良いので、電気 4 重極放射の場合、

$$\mathbf{E}=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{\mathrm{i}k^3}{6}\mathbf{n}\times[\mathbf{n}\times(\mathbf{D}_{\omega}\cdot\mathbf{n})] \tag{18}$$

$$\mathbf{B}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kr)}}{4\pi\varepsilon_0 cr}\frac{\mathrm{i}k^3}{6}\mathbf{n}\times(\mathbf{D}_{\omega}\cdot\mathbf{n}) \tag{19}$$

磁気双極子の場合、

$$\mathbf{E}=-\frac{k^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kr)}}{4\pi\varepsilon_0 rc}(\mathbf{n}\times\mathbf{m}_{\omega}) \tag{20}$$

$$\mathbf{B}=-\frac{k^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kr)}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{m}_{\omega}) \tag{21}$$

となる。共に $\mathbf{B}=\mathbf{n}\times\mathbf{E}/c$ が成り立つ。

また、ポインティングベクトルは $\overline{\mathbf{S}}=\mathbf{n}|\mathbf{E}|^2/(2\mu_0 c)$ が成り立つ。電気 4 重極放射の場合、

$$r^2\overline{S}_n=\frac{k^6}{1152\pi^2{\varepsilon_0}^2\mu_0 c}(|\mathbf{D}_{\omega}\cdot\mathbf{n}|^2-|\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_{\omega}\cdot\mathbf{n}|^2) \tag{22}$$

で、磁気双極子放射の場合は

$$r^2\overline{S}_n=\frac{k^4}{32\pi^2{\varepsilon_0}^2\mu_0 c^3}(|\mathbf{m}_{\omega}|^2-|\mathbf{m}_{\omega}\cdot\mathbf{n}|^2) \tag{23}$$

全立体角で積分すると、電気 4 重極放射の場合、

$$W = \frac{\mu_0 \omega^6}{1440\pi c^3} |\mathbf{D}_\omega|^2 \quad (|\mathbf{D}_\omega|^2 = D_{\omega jk} D^*_{\omega jk}) \tag{24}$$

で、磁気双極子放射の場合は

$$W = \frac{\mu_0 \omega^4}{12\pi c^3} |\mathbf{m}_\omega|^2 \tag{25}$$

ここで、

$$\int n_i n_j \mathrm{d}\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \tag{26}$$

$$\int n_i n_j n_k n_l \mathrm{d}\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj}) \tag{27}$$

という公式、及び $\mathrm{Tr}\, \mathbf{D}_\omega = 0$ を用いた。

6. $z = r\cos\theta$ とすると、静電ポテンシャルは

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2ar\cos\theta + a^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)(a/r)^n \tag{28}$$

となる。従って、

$$\phi \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \left(1 + \frac{a\cos\theta}{r} + \frac{a^2}{2r^2}(3\cos^2\theta - 1) \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{az}{r^3} + \frac{a^2}{2r^5}(3z^2 - r^2) \right) \tag{29}$$

よって、双極子モーメント $\mathbf{p}$ と電気四重極モーメント $\mathbf{D}$ は

$$\mathbf{p} = qa\, \mathbf{e}_z \tag{30}$$

$$\mathbf{D} = qa^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{31}$$

である。

7. 双極子モーメントを求めると

$$\mathbf{p}(t) = 2qa_0 \cos\omega t\, \mathbf{e}_z \tag{32}$$

となり、ヘルツベクトルを計算すると

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) = \frac{qa_0}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\cos(\omega t - kr)}{r} \mathbf{e}_z \tag{33}$$

となる。これを使って、電磁場を計算すればよい。

両方が同じ電荷の場合には、双極子モーメントは 0 なので、次の次数の電気四重極モーメントを計算する必要があり、

$$\mathbf{D} = 2qa^2 \cos^2\omega t \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{34}$$

である。また、$2\cos^2\omega t = 1 + \cos 2\omega t$ で、振動する成分だけが電磁波の発生に寄与するから、これを考慮して、ヘルツベクトルを計算すると ($kr \gg 1$ の時)

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) = -\frac{qa_0^2 k}{12\pi\varepsilon_0} \frac{\sin 2(\omega t - kr)}{r} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} \tag{35}$$

となる。

8. 磁気モーメントを計算すると

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int (\mathbf{r}\times\mathbf{i})\mathrm{d}\mathbf{r}^3 = \frac{I}{2}\int (\mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{s}) \tag{36}$$

で、円電流の場合、

$$\int (\mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{s}) = \int (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)\,\mathbf{e}_z = 2\pi a^2\,\mathbf{e}_z \tag{37}$$

である。よって、ベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I a^2}{4r^3}(\mathbf{e}_z\times\mathbf{r}) \tag{38}$$

次に、時間変化を考えるとすると、変化する電流の作る磁気モーメントは

$$\mathbf{m}(t) = \pi a^2 I\cos\omega t\,\mathbf{e}_z \tag{39}$$

である。よって、

$$\mathbf{\Pi}_{\mathrm{m}}(\mathbf{r},t) = \frac{a^2 I}{4r}\cos(\omega t - kr)\,\mathbf{e}_z \tag{40}$$

9. この系では、全電荷と双極子モーメントは 0 である。そこで、電気四重極モーメントの寄与を計算すると

$$\phi = \frac{qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\left[(3x^2-r^2)-(3y^2-r^2)\right] = \frac{3qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^5}(x^2-y^2) \tag{41}$$

である。

そして、電荷共に ω で回転する系での電気四重極モーメントは

$$\mathbf{D}_0 = 6qa^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{42}$$

である。元の座標系で見た時の電気四重極モーメントの計算には、回転変換の変換行列をつかう。四重極モーメントはテンソルの変換に従うので、

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{R}^{-\mathbf{1}}(t)\cdot\mathbf{D}_0\cdot\mathbf{R}(t) \tag{43}$$

で計算され、

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{44}$$

である。よって、

$$\mathbf{D}(t) = 6qa^2\begin{pmatrix} \cos 2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ \sin 2\omega t & -\cos 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 6qa^2\mathrm{Re}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t} \tag{45}$$

となる。これを用いて、ヘルツベクトルを計算すればよい。

すべて、同じ電荷の場合の電荷の静止系での四重極モーメントは

$$\mathbf{D}_0 = 2qa^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{46}$$

である。これを回転行列で変換すると

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{R}^{-\mathbf{1}}(t) \cdot \mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{R}(t) = \mathbf{D}_0 \tag{47}$$

となって、時間変化する成分がない。したがって、この系では電気四重極放射がない。更に高い次数の放射のプロセスを計算しないといけない。

10. 式 (81) の積分の $\cos(\pi z'/L)$ を $\cos(3\pi z'/L)$ とし、さらに、$kL = 3\pi$ として計算すればよい。

11. $\tau_0 = 6.25 \times 10^{-24}$s

12. $F_{\mathrm{ext}} = eE_0 \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$ だから、$x = \mathrm{Re}[A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}]$ とすると、

$$-m(\omega^2 - \mathrm{i}\omega^3\tau_0)A(\omega) = eE_0 \tag{48}$$

である。よって、

$$x = \mathrm{Re}\left[\frac{eE_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{-m(\omega^2 - \mathrm{i}\omega^3\tau_0)}\right] \tag{49}$$

である。そして、この外力のする仕事率の平均値は

$$\overline{W} = \overline{\dot{x}F_{\mathrm{ext}}} = \frac{e^2{E_0}^2\tau_0}{2m[1 + (\omega\tau_0)^2]} \tag{50}$$

一方、粒子の加速度は $a = -\mathrm{Re}(\omega^2 A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})$ である。そこで、ラーモアの公式の代入すると

$$\overline{W} = \tau_0 m\overline{a^2} = \frac{e^2{E_0}^2\tau_0}{2m[1 + (\omega\tau_0)^2]} \tag{51}$$

で等しい。ここで、時間平均は、一周期で行うことにする。

13. この方程式の一般解は

$$x = \frac{eE_0 t^2}{2m} + A\mathrm{e}^{t/\tau_0} + Bt + C \tag{52}$$

であるが、指数関数で発散する解は意味が無いので $A = 0$ という条件を課すと、放射の反作用を考えに入れない方程式の解と同じになってしまう。そのため、外力のした仕事は全て粒子の運動エネルギーの増加となり、放射で失われるエネルギーの分の帳尻が合わなくなる。