『電磁気学第２』講義概要 No.2【電磁波の発生】

1　遅延ポテンシャル

マックスウェル方程式（ローレンツゲージ）

$$\Box\,\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

$$\Box\,\mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{i} \quad (2)$$

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0 \quad (3)$$

静的な場合（スカラーポテンシャル）

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4)$$

無限遠で $\phi = 0$ の解

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \quad (5)$$

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\Delta\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}'$$
$$= -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (6)$$

$$\frac{1}{4\pi}\Delta\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (7)$$

単位点電荷 $\rightarrow$3 次元の δ 関数

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \quad (8)$$

ラプラス方程式のグリーン関数

$$\Delta G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (9)$$

無限遠で 0 という境界条件

$$G(R) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R} \quad (10)$$
$$(\mathbf{R} = \mathbf{r}-\mathbf{r}',\ R = |\mathbf{R}|)$$

グリーン関数による式 (4) の解の表現

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \quad (11)$$

波動方程式のグリーン関数

$$\Box\,G(\mathbf{r},t|\mathbf{r}',t') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t') \quad (12)$$

$$\Box\,\psi = -q(\mathbf{r},t) \quad (13)$$

$$\psi(\mathbf{r},t) = \int G(\mathbf{r},t|\mathbf{r}',t')q(\mathbf{r}',t')\mathrm{d}^3\mathbf{r}'\mathrm{d}t' \quad (14)$$

波動方程式のグリーン関数（遅延グリーン関数、先進グリーン関数）

$$G_{\mathrm{ret}}(R,\tau) = \frac{1}{4\pi R}\delta(\tau - R/c) \quad (15)$$

$$G_{\mathrm{adv}}(R,\tau) = \frac{1}{4\pi R}\delta(\tau + R/c) \quad (16)$$
$$(\tau = t - t')$$

導出

1. 式 (12)$\rightarrow \Box\,G = 0$ ($R \neq 0$ or $\tau \neq 0$) の解
2. 無限遠で 0（境界条件）$G(\mathbf{r},t|\mathbf{r}',t') = G(R,\tau)$
$$\Box\,G = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial\tau^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2(RG)}{\partial R^2} = 0 \quad (17)$$
3. $X = RG$
$$X(R,\tau) = f(\tau - R/c) + g(\tau + R/c) \quad (18)$$
4. R は動径方向：f は外向きに広がる波、g は内向きに集まる波
5. 物理的には中心の原因が外に伝わるの方が因果律を満たす: f が解
$$G(R,\tau) = \frac{f(\tau - R/c)}{R} \quad (19)$$
6. $c\rightarrow\infty$、式 (12)
$$\Delta G(\mathbf{r},t|\mathbf{r}',t') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t') \quad (20)$$
7. G：ラプラス方程式のグリーン関数に比例
$$G(R,\tau) \rightarrow \frac{1}{4\pi}\frac{\delta(\tau)}{R} = \frac{f(\tau)}{R} \quad (21)$$
$$f(\tau) = \frac{\delta(\tau)}{4\pi} \quad (22)$$
8. 式 (15) の遅延グリーン関数

先進グリーン関数：g を用いる $\rightarrow$ 式 (16) [1]。

[1] 一般に

$$G(R,\tau) = AG_{\mathrm{ret}}(R,\tau) + BG_{\mathrm{adv}}(R,\tau)\ \ (A+B=1) \quad (23)$$

は、グリーン関数となる。

遅延解:式 (14) の t' の積分を実行

$$\psi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{q(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{24}$$

遅延ポテンシャル

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{25}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{26}$$

2　ヘルツベクトル

ポテンシャル：4 成分＋ゲージ条件 →3 つの自由度 →1 つのベクトル

ヘルツベクトル $\mathbf{\Pi}$：ローレンツゲージ

$$\mathbf{A} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial t} \tag{27}$$

$$\phi = -\operatorname{div}\mathbf{\Pi} \tag{28}$$

仮想分極 $\tilde{\mathbf{P}}$：電荷の保存法則

$$\mathbf{i} = \frac{\partial\tilde{\mathbf{P}}}{\partial t} \tag{29}$$

$$\rho = -\operatorname{div}\tilde{\mathbf{P}} \tag{30}$$

マックスウェル方程式

$$\Box\mathbf{\Pi} = -\frac{\tilde{\mathbf{P}}}{\varepsilon_0} \tag{31}$$

電場、磁場

$$\mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0\operatorname{rot}\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial t} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}}{\partial t^2}\\ &= \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}-\frac{\tilde{\mathbf{P}}}{\varepsilon_0}\end{aligned} \tag{33}$$

遅延ポテンシャル解

$$\mathbf{\Pi}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}'、t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{34}$$

3　多重極放射

静電場：式 (5) で $r\gg r'$ の時

$$\phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r}+\sum_{i=1}^{3}\frac{x^ip^i}{r^3}\ldots\right) \tag{35}$$

$$Q = \int\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{36}$$

$$p^i = \int\rho(\mathbf{r}')x'^i\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{37}$$

変動場：式 (34) の時間変動 → 正弦的[2]

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}',t)=\tilde{\mathbf{P}}_\omega(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{40}$$

$$\mathbf{\Pi}_\omega(\mathbf{r},t)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{4\pi\varepsilon_0}\int\tilde{\mathbf{P}}_\omega(\mathbf{r}')\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}'\quad(k=\omega/c) \tag{41}$$

$y=kr'\ll 1$ の時

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta}}{\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta}}{\zeta}\right)\bigg|_{y=0}\frac{y^n}{n!} \tag{42}$$

$$\zeta=k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=\sqrt{x^2-2xy\cos\chi+y^2},\ x=kr$$

y ～（電磁波を出す源の大きさ/電磁波の波長）を表すパラメータ

3.1　双極子放射

式 (42) で $n=0$ の場合

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta}}{\zeta}\bigg|_{y=0}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x} \tag{43}$$

$$\mathbf{\Pi}^{(0)}_\omega(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kr)}}{r}\int\tilde{\mathbf{P}}_\omega(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{44}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x'^j\tilde{P}^i_\omega}{\partial x'^i} &= \sum_{i=1}^{3}\left(\delta_{ij}\tilde{P}^i_\omega+x'^j\frac{\partial\tilde{P}^i_\omega}{\partial x'^i}\right)\\ &= \tilde{P}^j_\omega+x'^j\operatorname{div}\tilde{\mathbf{P}}_\omega\end{aligned} \tag{45}$$

$\operatorname{div}\tilde{\mathbf{P}}=-\rho$ より

$$\int\tilde{P}^j_\omega(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}'=\int\left(\rho_\omega x'^j+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x'^j\tilde{P}^i_\omega}{\partial x'^i}\right)\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \tag{46}$$

---

[2] もし、正弦的な変化でない場合はフーリエ変換を使って、

$$\tilde{\mathbf{P}}_\omega(\mathbf{r}')=\int\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}',t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{38}$$

として考える。また、この逆変換は

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}',t)=\int\tilde{\mathbf{P}}_\omega(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \tag{39}$$

である。

右辺の括弧内の第 2 項は表面積分 → 十分大きな領域をとれば 0

$$\int \tilde{\mathbf{P}}_\omega(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}' = \int \mathbf{r}'\rho_\omega(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3\mathbf{r}' = \mathbf{p}_\omega \tag{47}$$

$$\mathbf{\Pi}^{(0)}_\omega(\mathbf{r},t) = \frac{\mathbf{p}_\omega}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kr)}}{r} \tag{48}$$

電磁波源の外では $\tilde{\mathbf{P}} = 0$

$$\mathbf{E} = \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi} \tag{49}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0\,\mathrm{rot}\,\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial t} \tag{50}$$

$$\mathbf{\Pi}^{(0)}_\omega(\mathbf{r},t) = \mathbf{C}(t)f(r) \tag{51}$$

$$\mathbf{C}(t) = \frac{\mathbf{p}_\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{4\pi\varepsilon_0} \tag{52}$$

$$f(r) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi}^{(0)}_\omega(\mathbf{r},t) = -\mathbf{C}\times\ \mathrm{grad}\,f\\ &= (\mathbf{r}\times\mathbf{C})\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\,\mathbf{\Pi}^{(0)}_\omega = \ \mathrm{rot}\ \left((\mathbf{r}\times\mathbf{C})\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)\\ &= \left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)\ \mathrm{rot}\,(\mathbf{r}\times\mathbf{C})\\ &-[(\mathbf{r}\times\mathbf{C})\times\mathbf{r}]\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)\right)\end{aligned} \tag{55}$$

$$\mathrm{rot}\,(\mathbf{r}\times\mathbf{C}) = -2\mathbf{C} \tag{56}$$

$\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$（動径方向の単位ベクトル）

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{C}) = \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C} \tag{57}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = -\frac{1+\mathrm{i}kr}{r^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr} \tag{58}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{3(1+\mathrm{i}kr)-k^2r^2}{r^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{(0)}_\omega = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kr)}}{4\pi\varepsilon_0}&\left[\frac{(1+\mathrm{i}kr)}{r^3}[3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}_\omega)-\mathbf{p}_\omega]\right.\\ &\left.-[\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{p}_\omega)]\frac{k^2}{r}\right]\end{aligned} \tag{60}$$

$$\mathbf{B}^{(0)}_\omega = -\mathrm{i}\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kr)}\left(\frac{1+\mathrm{i}kr}{r^2}\right)(\mathbf{n}\times\mathbf{p}_\omega) \tag{61}$$

$kr \gg 1$（波動域）

$$\mathbf{E}^{(0)}_\omega \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kr)}\frac{k^2}{r}[\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{p}_\omega)] \tag{62}$$

$$\mathbf{B}^{(0)}_\omega \approx \frac{c\mu_0}{4\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-kr)}\frac{k^2}{r}(\mathbf{n}\times\mathbf{p}_\omega) \tag{63}$$

$$\mathbf{E}^{(0)}_\omega\cdot\mathbf{B}^{(0)}_\omega = 0 \tag{64}$$

ポインティングベクトル（複素表示では計算できない）[3]

$$\mathbf{S}^{(0)}_\omega = [\mathrm{Re}(\mathbf{E}^{(0)}_\omega)\times\mathrm{Re}(\mathbf{B}^{(0)}_\omega)]/\mu_0 \tag{66}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{S}}^{(0)}_\omega &= \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\,(\mathbf{E}\times\mathbf{B}^*)\\ &= \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0c^3}\frac{\omega^4}{r^2}(\mathbf{p}_\omega\cdot\mathbf{p}^*_\omega-|\mathbf{p}_\omega\cdot\mathbf{n}|^2)\mathbf{n}\end{aligned} \tag{67}$$

θ：$\mathbf{p}_\omega$ と $\mathbf{n}$ のなす角度

$$\overline{\mathbf{S}}^{(0)}_\omega = \frac{|\mathbf{p}_\omega|^2}{32\pi^2\varepsilon_0c^3}\frac{\omega^4}{r^2}\sin^2\theta\,\mathbf{n}\quad(|\mathbf{p}_\omega|^2 = \mathbf{p}_\omega\cdot\mathbf{p}^*_\omega) \tag{68}$$

$\theta = \pi/2$ の方向 → 最大の電磁波強度

放出される全パワー

$$W = \int\overline{\mathbf{S}}^{(0)}_\omega\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S \tag{69}$$

$$= \frac{|\mathbf{p}_\omega|^2\omega^4}{16\pi\varepsilon_0c^3}\int_0^\pi\sin^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta \tag{70}$$

$$= \frac{\mu_0|\mathbf{p}_\omega|^2}{12\pi c}\omega^4 \tag{71}$$

波動域での場 ($1/r$ に比例する項)、

$$\nabla \to -\mathrm{i}k\mathbf{n} \tag{72}$$

逆フーリエ変換：時間領域での表示

$$\mathbf{p}(t) = \int\mathbf{p}_\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \tag{73}$$

$k = \omega/c$、$\exp(\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}kr) = \exp\mathrm{i}\omega(t-r/c)$

$$\mathbf{\Pi}^{(0)}(\mathbf{r},t) = \frac{\mathbf{p}(t-r/c)}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{74}$$

---

[3] $\alpha = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ と $\beta = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ の積の時間平均（$\overline{}$ は時間平均）

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{Re}(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})\mathrm{Re}(b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})}\\ &= \overline{\left(\frac{a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+a^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2}\right)\left(\frac{b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+b^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2}\right)}\\ &= \frac{ab^*+ba^*}{4} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(\alpha\beta^*)\end{aligned} \tag{65}$$

とすればよい。

電気双極子近似のスカラーポテンシャル、ベクトルポテンシャル

$$\phi(\mathbf{r},t) = -\operatorname{div}\boldsymbol{\Pi}^{(0)}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}(t-r/c)}{r^3} + \frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{cr^2}\right) \tag{75}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{\Pi}^{(0)}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \frac{\mu_0\dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{4\pi r} \tag{76}$$

波動域での電場

$$\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r},t) = \int \mathbf{E}^{(0)}_\omega \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kr)}\omega^2[\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{p}_\omega)]\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \tag{77}$$

$$\mathbf{p}\ddot{(t)} = -\int \omega^2\mathbf{p}_\omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \tag{78}$$

$$\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}(\mathbf{n}\times[\mathbf{n}\times\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)]) \tag{79}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{n}\times\mathbf{E}/c,\ \ \mathbf{n}\cdot\mathbf{E} = 0 \tag{80}$$

ポインティングベクトル

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 c}[\mathbf{E}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{E})] = \frac{|\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r},t)|^2}{\mu_0 c}\mathbf{n} = \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}[|\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)|^2 - (\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)\cdot\mathbf{n})^2]\mathbf{n} \tag{81}$$

単位時間あたりの全放出エネルギー

$$W = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)|^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{\mu_0|\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)|^2}{6\pi c} \tag{82}$$

電荷 e 荷電粒子の軌道：$\boldsymbol{\xi}(t) \to \mathbf{p} = e\boldsymbol{\xi}$、$\ddot{\mathbf{p}} = e\ddot{\boldsymbol{\xi}}$
ラーモアの輻射公式

$$W = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c}|\ddot{\boldsymbol{\xi}}(t-r/c)|^2 \tag{83}$$

4　放射の反作用

放出するエネルギー：電磁場から力を受ける

$$\Delta E = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t^2}\right|^2\mathrm{d}t = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left[\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t}\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t^3}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \tag{84}$$

右辺の第 1 項 $\to 0$、第 2 項は

$$\mathbf{F}_{\mathrm{reac}} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t^3} \tag{85}$$

変位の 3 階微分に比例する力を入れた運動方程式

$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t^2} - \tau_0\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{\xi}}{\mathrm{d}t^3}\right) = \mathbf{F} \tag{86}$$

$$\tau_0 = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3} \tag{87}$$

非現実的な解：条件をつけて除く：式 (86) で $\mathbf{F} = 0$ の時

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}_0\mathrm{e}^{t/\tau_0} + \mathbf{V}t + \boldsymbol{\xi}_0 \tag{88}$$

初期条件：$\mathbf{A}_0 = 0$

問題

1. z 軸上で $z = a$ の点に点電荷 q を置いたときの静電ポテンシャルを、原点を基準にして多重極展開し、電気四重極のオーダーまで求めよ。

2. z 軸上で $z = \pm a$ の点にそれぞれ点電荷 $\pm q$ を置き、$a = a_0\cos\omega t$ で振動させた場合に、発生する電磁波を最低時の近似で求めよ。両方とも q の場合はどうか。

3. $x-y$ 面内、$x = \pm a,\ y = 0$ の点に q、$x = 0,\ y = \pm a$ の点に $-q$ の点電荷を置いたときの、静電ポテンシャルを最低次の近似で求めよ。この電荷配置を角速度 ω で回転させたとき、発生する電磁波を最低次の近似で求めよ。また、配置する電荷を全て q にした場合はどうか。

4. 電子に対して、式 (87) の τ_0 を計算せよ。

5. 式 (86) で、運動が一次元の場合を考える。外力として $F_{\mathrm{ext}} = eE_0\cos\omega t$ の場合の解を求めよ。ただし、条件は $E_0 = 0$ ならば、$\xi = 0$ となるような解を求めよ。さらに、この場合に外力がする仕事の平均値を計算し、ラーモアの公式で計算される電磁波のエネルギーに等しいことを示せ。