連続体の力学

第6回

内容

- ナヴィエ・ストークス方程式
- 厳密解
- ストークス近似

12 ナヴィエ・ストークス方程式

式(161) の応力テンソルを，連続体の方程式に代入すると

$$t_{ij} = \lambda\delta_{ij}\mathrm{div}\,\mathbf{v} + 2\eta e_{ij} - p\delta_{ij} \qquad (161)$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = \mathbf{K} - \mathrm{grad}\,[p - (\lambda+\eta)\mathrm{div}\,\mathbf{v}] + \eta\Delta\mathbf{v} \quad (163)$$

この方程式は，ナヴィエ・ストークス方程式と呼ばれ，粘性流体の運動を記述する方程式である.

非圧縮性の場合（$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$），少し簡単化されて

$$\rho\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = \mathbf{K} - \mathrm{grad}\,p + \eta\Delta\mathbf{v} \qquad (164)$$

ηを唯一のパラメータとして含む

12 ナヴィエ・ストークス方程式

また，体積力に関しては保存力を仮定すると

$$\mathbf{K} = -\rho \operatorname{grad} \Lambda \tag{165}$$

と書けるので

$$p^* = p + \rho\Lambda \tag{166}$$

従って

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p^* + \nu \Delta \mathbf{v} \tag{167}$$

$$\boldsymbol{\upsilon = \frac{\eta}{\rho}}$$ 運動粘性率

水（20℃）：$1.0\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$、空気（20℃ 1気圧）：$15\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$

12.1 粘性と渦

完全流体の場合も非線形項が存在→渦なしを仮定→解くべき方程式は速度ポテンシャルに対するラプラス方程式→線形の理論→非線形項は圧力方程式に吸収

粘性流で渦なしを仮定するとどうなるか？

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}\Phi$$

を粘性項に代入すると

$$\nu \Delta \mathrm{v} = \nu \mathrm{grad}\, \Delta \Phi = 0 \qquad (168)$$

渦なし流では粘性が表れない

↓

渦の存在が粘性にとって本質的であることを示す.

12.2 レイノルズの相似則

式(167) は，νという一つのパラメータを含む.

$$\frac{\mathrm{Dv}}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, p^* + \nu\Delta\mathrm{v} \qquad (167)$$

この方程式に対して，スケール変換を行う.

流れの典型的な速さをU，流れのサイズをL
→典型的な時間スケールは$T = L/U$

下記のケール変換

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i/L, \;\; t' = t/T, \\ v_i' &= v_i/U, \xi = (p^*/\rho)/U^2 \end{aligned} \qquad (169)$$

12.2 レイノルズの相似則

式(167) は,

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}'}{\mathrm{D}t'} = -\mathrm{grad}\,'\xi + \frac{1}{R}\Delta'\mathbf{v}' \qquad (170)$$

grad'やΔ'は$x_i{}'$に関する微分

方程式に含まれる無次元量R：レイノルズ数

$$R = \frac{UL}{\nu} \qquad (171)$$

12.2 レイノルズの相似則

相似の条件が成り立つような境界条件を与えた場合に，流れが相似になるためには，その流れのレイノルズ数が等しくなければならない．このような関係をレイノルズの相似則という

実験を行う場合：装置の大きさを実物のλ分の1に縮小

Uをλ倍→レイノルズ数は同じ、時間スケールはλ^2分の1

時間変化のスケールは実物にあわせる→Uもλ分の1→粘性係数はλ^2分の1

12.3 一方向の流れの場合

ナヴィエ・ストークス方程式の厳密な解が得られる例として，一方向の流れを扱う．この時、$\mathbf{v} = (0,0,v)$とすると、$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$より

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \qquad (172)$$

vはzによらない

$$\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial t} \qquad (173)$$

非線形項が消える

式（167）に代入

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (174)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (175)$$

$p = p(z)$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad (176)$$

12.3 一方向の流れの場合

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)} = \boxed{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}} \tag{177}$$

左辺はxとyだけの関数　右辺はzだけの関数

変数分離可能

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \alpha \tag{178}$$

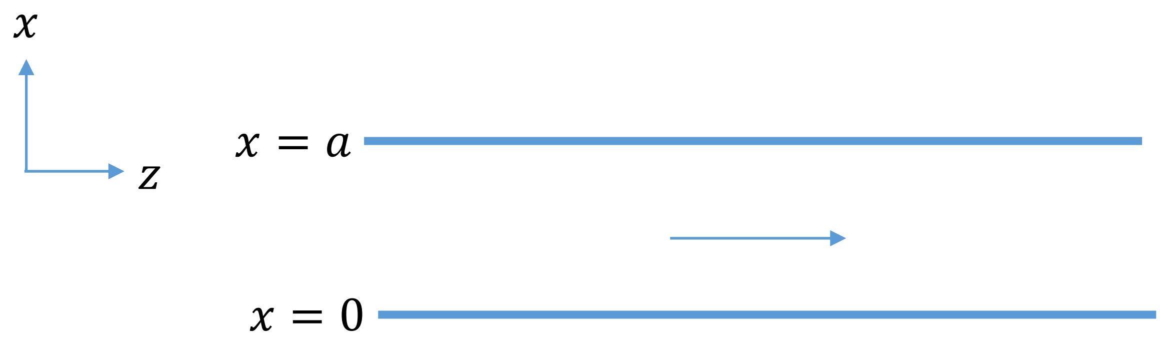
$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \alpha \tag{179}$$

式（179）は積分して

$$p = p_0 - \rho\alpha z \tag{180}$$

12.3.1 ポアズイユの流れ

定常流で， y方向には一様で$x = 0$ と$x = a$ の領域に挟まれた流れ



$$-\nu \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \alpha \qquad (181)$$

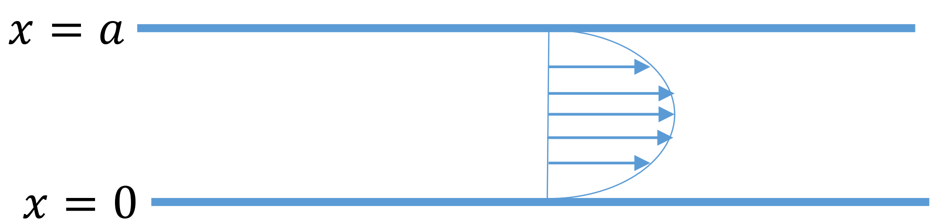
$$\Rightarrow \quad v = -\frac{\alpha}{2\nu}x^2 + Ax + B \qquad (182)$$

境界条件
粘性の影響で，物体の表面では法線方向だけでなく，すべての方向の速度成分が**0** となる.

$$v = -\frac{\alpha}{2\nu}x(x-a) \qquad (183)$$

（平面）ポアズイユの流れ

12.3.1 ポアズイユの流れ



流れにより境界面が単位面積あたりに受ける力
→応力テンソルのt_{zx}を計算すればよい

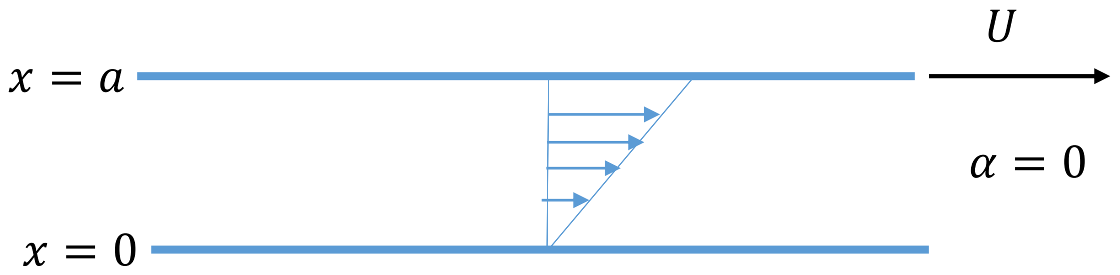
$$t_{zx} = \eta \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\rho \alpha}{2}(2x - a) \qquad (184)$$

$$x = 0 \rightarrow \quad f_z = \frac{\rho \alpha a}{2} = -\frac{a}{2}\frac{\partial p}{\partial z}$$

圧力勾配に比例する

12.3.2 クエットの流れ

同じ条件で，$x=a$の壁面が，U方向に速度U で運動している場合



$$v=\frac{U}{a}x \qquad (185)$$

クエットの流れ

12.3.3 ハーゲン・ポアズイユの流れ

半径aの円筒内を流れる軸対称な流れ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\alpha}{\nu} \tag{186}$$

$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \tag{187}$$

軸対称な流れ

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\alpha}{\nu} \tag{188}$$

12.3.3 ハーゲン・ポアズイユの流れ

積分すると

$$v = -\frac{\alpha}{4\nu} r^2 + A \log r + B \qquad (189)$$

境界条件は，$r = 0$で有限→ $A = 0$， $r = a$ で$v = 0$ → $B = \frac{\alpha}{4v} a^2$

$$v = -\frac{\alpha}{4\nu} (r^2 - a^2) \qquad (190)$$

ハーゲン・ポアズイユの流れ

12.3.3 ハーゲン・ポアズイユの流れ

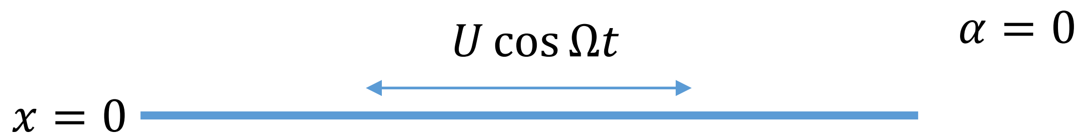
流量は

$$Q = \int_0^a v 2\pi r \, \mathrm{d}r = \frac{\pi \alpha a^4}{8\upsilon} = \frac{\pi a^4}{8\eta}\left|\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right| \quad (191)$$

流量が圧力勾配と半径の4 乗に比例し，粘性率に反比例する
→ハーゲン・ポアズイユの法則

12.3.4 振動する解

非定常な場合，　$x = 0$ の板がz方向に$v = U\cos\Omega t$で振動している場合



$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = 0 \qquad (192)$$

$$v(t,x) = \exp(i\Omega t - kx) \rightarrow i\Omega - k^2 \nu = 0 \quad (193)$$

$$k = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{i}\Omega}{\nu}} = \pm(1+\mathrm{i})\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}} = \pm(1+\mathrm{i})\gamma \qquad (194)$$

12.3.4 振動する解

$$v(t,x) = \exp(-i\Omega t - k'x) \to -i\Omega - k'^2 v = 0$$

$$k' = \pm\sqrt{\frac{-\mathrm{i}\Omega}{\nu}} = \pm(1-\mathrm{i})\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}} = \pm(1-\mathrm{i})\gamma \quad (195)$$

これらの線形結合で解を構成すると

$$\begin{aligned} v =& \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\left[A\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\gamma x} + B\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})\gamma x}\right] \\ &+ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\left[C\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})\gamma x} + D\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})\gamma x}\right] \end{aligned} \quad (196)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}} \quad (197)$$

12.3.4 振動する解

境界条件
$x \to \infty$ で$v = 0$ だから$A = C = 0$
$x = 0$ で$v = U\cos\Omega t$だから

$$U\cos\Omega t = B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t} \qquad (198)$$

$$B + D = U, \ (B - D) = 0$$

$$v = U\mathrm{e}^{-\gamma x}\cos(\Omega t - \gamma x) \qquad (199)$$

この解は，板の振動の影響は1/γ程度の部分にしか存在しない

粘性流体では境界面の沿った部分で粘性の影響が強く現れる部分が存在し，境界層と呼ばれている。

これはその一例でストークス層と呼ばれている．

12.4 ストークス近似

流速がゆっくりで，レイノルズ数が小さい場合，ナヴィエ・ストークス方程式の非線形項を無視する

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, p + \nu \Delta \mathbf{v} \qquad (200)$$

このような近似はストークス近似と呼ばれている．
この近似の範囲では，式(200) の両辺の発散を計算すると

$$\Delta p = 0 \qquad (201)$$

圧力は調和関数

回転を計算すると

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \Delta \omega \qquad (202)$$

渦度ベクトルは拡散方程式に従う

12.4.1 基本解

定常流を考える

$$\eta \Delta \mathbf{v} = \mathrm{grad}\, p \tag{203}$$

この方程式は，線形方程式のため解の重ね合わせが可能である．また，$\mathbf{v}_h = \mathrm{grad}\Phi$かつ，$\Delta\Phi = 0$を満たす解を加えることも可能である．

12.4.1 基本解

このような形で解を構成するための基本となる解が以下のように与えられている.

まず，z方向に一様な流れが存在する場合を元に考える.

このとき，圧力を

$$p_{\mathrm{e}} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{204}$$

とすると、

$$\Delta p = \frac{\partial}{\partial z}\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \quad (r \neq 0) \tag{205}$$

が得られるので，解の候補である.

12.4.1 基本解

次に$\Delta r = 2/r$という関係を考えて,

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2\eta}\mathrm{grad}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right) \tag{206}$$

としてみると

$$\eta\Delta\mathbf{v}_1 = \mathrm{grad}\, p_{\mathrm{e}} \tag{207}$$

を満たす。しかし、

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2\eta}\Delta\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right) = \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{208}$$

と発散が0にならない。

12.4.1 基本解

そこで,

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\eta r}\mathbf{e}_z \tag{209}$$

を考えると、$\Delta\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$であり、

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{210}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_\mathrm{e} &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \\ &= \frac{1}{2\eta}\operatorname{grad}\frac{\partial r}{\partial z} - \frac{1}{\eta r}\mathbf{e}_z \\ &= -\frac{1}{2\eta}\left(\frac{xz}{r^3}, \frac{yz}{r^3}, \frac{z^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right)\end{aligned} \tag{211}$$

12.4.1 基本解

$$p_e = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \quad \mathbf{v}_e = -\frac{1}{2\eta}\left(\frac{xz}{r^3}, \frac{yz}{r^3}, \frac{z^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right)$$

は式(203) の解となる.

この組み合わせはストークスレットと呼ばれる基本解である.

このさらに，この解をx, y, z で任意回数微分したものも解となっているので，これらの線形結合で解を構成できる.

12.4.2 一様な流れの中の球

この流体の中に，半径a の球を入れる．
境界条件
$r = a$で，$\mathbf{v} = 0$ かつ，$r \to \infty$で，$\mathbf{v} = U\mathbf{e}_z$かつ，$p \to p_\infty$.

解の形を

$$\mathbf{v} = U\mathbf{e}_{\mathrm{z}} + A\mathbf{v}_{\mathrm{e}} + B\mathbf{v}_{\mathrm{h}} \tag{212}$$

$$p = p_\infty + Ap_{\mathrm{e}} \tag{213}$$

と仮定する。また、完全流体の場合を参考にして

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\mathrm{h}} &= \mathrm{grad}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \\ &= \left(\frac{3xz}{r^5}, \frac{3yz}{r^5}, \frac{3z^2 - r^2}{r^5}\right) \end{aligned} \tag{214}$$

12.4.2 一様な流れの中の球

球面上での境界条件

$$U\mathbf{e}_z - \frac{A}{2\eta}\left(\frac{xz}{a^3}, \frac{yz}{a^3}, \frac{z^2}{a^3} + \frac{1}{a}\right) + B\left(\frac{3xz}{a^5}, \frac{3yz}{a^5}, \frac{3z^2 - a^2}{a^5}\right) = 0$$

各成分で計算する

x成分、 y成分

$$\frac{A}{2\eta}\frac{1}{a^3} - B\frac{3}{a^5} = 0$$

z成分

$$U - \frac{A}{2\eta}\left(\frac{z^2}{a^3} + \frac{1}{a}\right) + B\left(\frac{3z^2 - a^2}{a^5}\right) = 0$$

$$U - \frac{A}{2\eta}\frac{1}{a} - B\frac{1}{a^3} + z^2\left(\frac{A}{2\eta}\frac{1}{a^3} - B\frac{3}{a^5}\right) = 0$$

$$\frac{A}{2\eta} - \frac{3B}{a^2} = 0 \qquad (215)$$

$$U - \frac{A}{2\eta a} - \frac{B}{a^3} = 0 \qquad (216)$$

12.4.2 一様な流れの中の球

解くと

$$A = \frac{3}{2}\eta U a,\ B = \frac{U}{4}a^3 \qquad (217)$$

式(212)に代入すると

$$\mathbf{v} = \frac{U}{4}\left[-\frac{3axz}{r^3}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right), -\frac{3ayz}{r^3}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right), 4-3\frac{a}{r}-\frac{a^3}{r^3}-\frac{3az^2}{r^3}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\right]$$

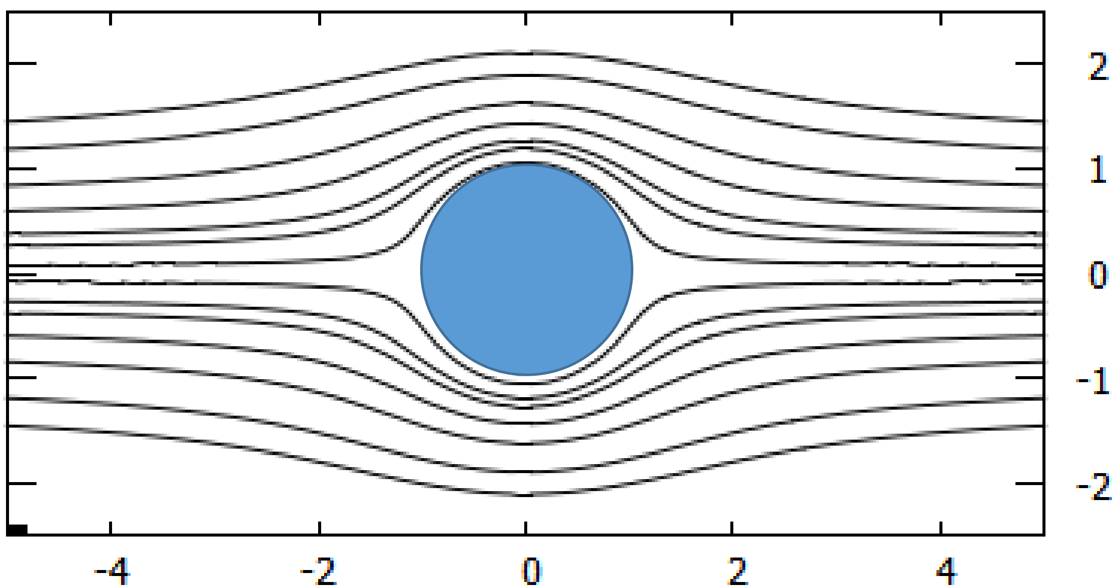
圧力は

$$p = p_\infty - \frac{3\eta U a}{2}\frac{\cos\theta}{r^2}$$

12.4.2 一様な流れの中の球

非圧縮流体で軸対称な流れなのでストークスの流れの関数が存在する。

$$\Psi_s = \frac{U}{4}\frac{\sin^2\theta}{r}(r-a)^2(2r+a)$$



12.4.2 一様な流れの中の球

力の働く方向は，対称性からz方向に限られる．

球面上で応力のz成分を計算する

$$t_{zj}n_j|_{r=a} = -p\cos\theta + \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + n_j\frac{\partial v_j}{\partial z}\right) \qquad (220)$$
$$= -p_\infty \cos\theta + \frac{3\eta U}{2a}$$

球面で積分すれば

$$F_z = 6\pi\eta a U \qquad (221)$$

ストークスの抵抗の法則