連続体の力学

第5回

内容

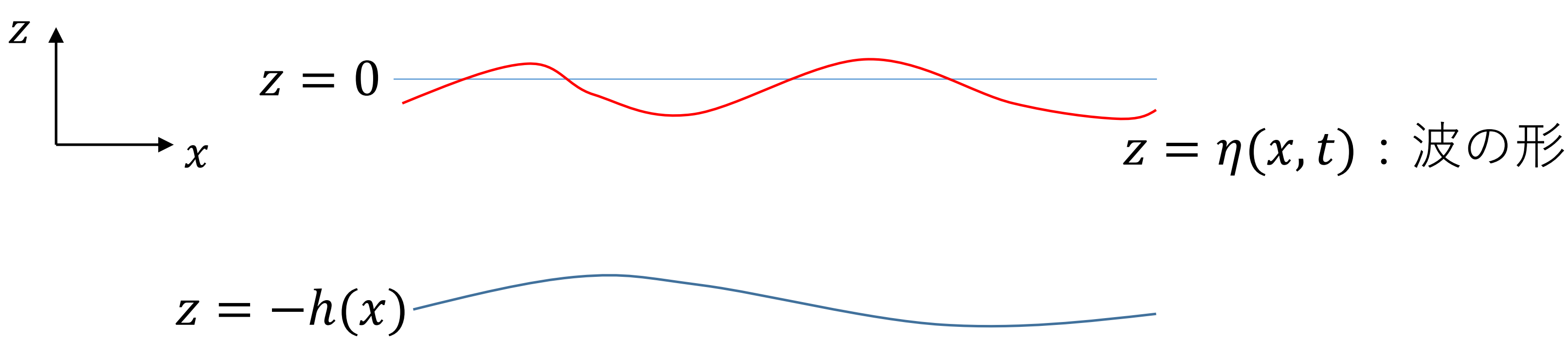
- 波動
- 渦定理
- 粘性流体

9 波動

非圧縮性の完全流体の渦なしの流れにおける波動を扱う。
速度ポテンシャルΦは，深さzと水平方向xのみの関数（y方向には一様）
解くべき方程式は

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{114}$$

流体の深さh は波の無いときを基準として$z = 0$ とし， $z = -h(x)$で与える。流体の表面は$z = \eta(x, t)$で表される。



9 波動

境界条件：
底の部分：速度の法線成分が０
表面：表面の流体粒子は常に表面にいる。

$$\frac{\mathrm{D}(z-\eta)}{\mathrm{D}t} = v_z - \frac{\mathrm{D}\eta}{\mathrm{D}t} = v_z - \frac{\partial \eta}{\partial t} - v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (115)$$

運動学的境界条件

圧力方程式から

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\rho}{2}|\mathrm{grad}\,\Phi|^2 - \rho g z + F(t) \qquad (116)$$

$z=\eta$ では，圧力は気圧p_0等しいので$F(t)=p_0$すれば$z=\eta$にて

$$\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2g}|\mathrm{grad}\,\Phi|^2 \qquad (117)$$

9.1 線形近似

波の振幅が十分小さく，速度が遅いときは線形近似が成り立つ．式 (115) は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \qquad (118)$$

式(117) は

$$\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad (119)$$

となる．ここからηを消去すると

$$g\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \qquad (120)$$

これらの条件は$z=\eta$で与えるべき→微小振幅：$z=0$で与えてよい

9.1 線形近似

hが一定の場合、方程式の解の形を

$$\Phi = f(z)\cos(\omega t - kx) \tag{121}$$

と仮定する。ラプラス方程式から

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} - k^2 f = 0 \tag{122}$$

この解は

$$f = A\mathrm{e}^{kz} + B\mathrm{e}^{-kz} \tag{123}$$

9.1 線形近似

境界条件　$z=-h$で$v_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0$

$$k(A\mathrm{e}^{-kh}-B\mathrm{e}^{kh})=0 \tag{124}$$

$z=0$で式(120）が成り立つ

$$gk(A-B)-\omega^2(A+B)=0 \tag{125}$$

$A=B=0$ 以外の解の存在→ $\begin{vmatrix} e^{-kh} & -e^{kh} \\ gk-\omega^2 & -(gk+\omega^2) \end{vmatrix}$=0

$$\omega^2=gk\frac{1-\mathrm{e}^{-2kh}}{1+\mathrm{e}^{-2kh}}=gk\tanh kh \tag{126}$$

分散関係を与える

9.1 線形近似

速度ポテンシャル

$$\Phi = A\mathrm{e}^{-kh}[\mathrm{e}^{k(z+h)} + \mathrm{e}^{-k(z+h)}]\cos(\omega t - kx)$$
$$= C\cosh k(z+h)\cos(\omega t - kx) \tag{127}$$

水面の変位

$$\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$
$$= \frac{C\omega}{g}\cosh kh\sin(\omega t - kx) \tag{128}$$

通常の進行波を表し，振幅は$\eta_0 = C\omega\cosh kh/g$ である．

9.1.1 長い波・浅い波

波の波長が深さに比べて十分長い場合，
すなわち，$kh \ll 1$の場合，分散関係は

$$\tanh x \approx x \quad x \ll 1$$

$$\omega = k\sqrt{gh} \tag{129}$$

波の速度は一定で

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh} \tag{130}$$

9.1.1 長い波・浅い波

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = Ck \cosh k(z+h) \sin(\omega t - kx) \quad (131)$$

$$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = Ck \sinh k(z+h) \cos(\omega t - kx) \quad (132)$$

$|z| < h$なので，$|\sinh k(z+h)| \ll 1$，$\cosh k(z+h) \approx 1$

$$\begin{aligned} v_x &= Ck \sin(\omega t - kx) \\ &= \eta_0 (g/c) \sin(\omega t - kx) \quad (133) \\ v_z &= 0 \quad (134) \end{aligned}$$

流体の動きは水平方向で，深さにはほとんど依存しない
このような波を長波または浅水波といい，
この近似を長波近似または浅水波近似と呼ぶ

9.1.1 長い波・浅い波

津波（wikipedia）

周期T：2分から1時間くらい

速さc：$\sqrt{gh}$

太平洋の深さ：約4000 m → $c = 720\ \mathrm{km/h}$

長波近似は成り立つのか？

波長λ：cT→ 24〜720 km

$$\lambda \gg h$$

9.1.2 短い波・深い波

逆の場合を考えよう． $kh \gg 1$ の場合には，$\tanh kh \approx 1$
分散関係は

$$\omega = \sqrt{kg} \tag{135}$$

波の速度は

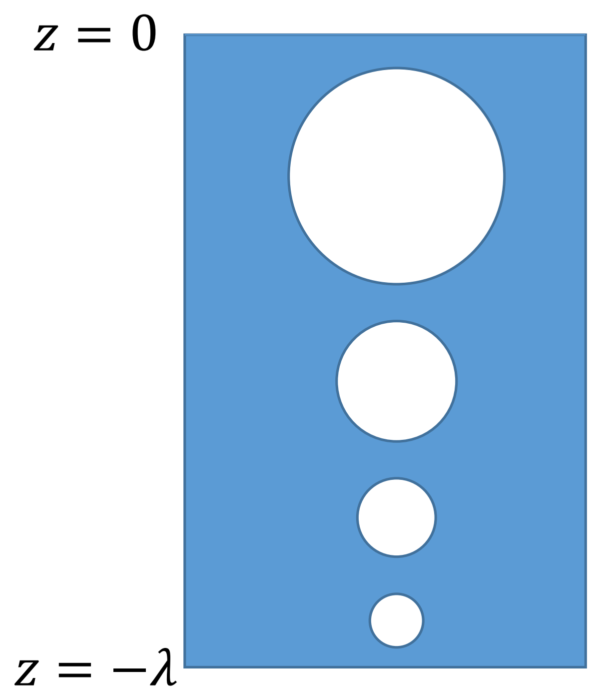
$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} \tag{136}$$

波長が短くなるにしたがって，速度は遅くなる．

9.1.2 短い波・深い波

$$\sinh k(z+h) \approx \cosh k(z+h) \approx e^{k(z+h)}/2$$

$$\begin{aligned} v_x &= Cke^{k(z+h)}\sin(\omega t - kx)/2 \\ &= \eta_0 \omega e^{kz}\sin(\omega t - kx) \qquad (137) \\ v_z &= Cke^{k(z+h)}\cos(\omega t - kx)/2 \\ &= \eta_0 \omega e^{kz}\cos(\omega t - kx) \qquad (138) \end{aligned}$$



流体の流れは，円を描くような速度ベクトルとなる．
深さ方向には急速に小さくなり，表面から波長程度の部分に波が存在する．

9.2 音波

ここでは、音波を扱う。音波は粗密波であるので、密度が一定という仮定はなりたい。ただし、変化量は微小として扱い、

$$\text{状態方程式}: p = f(\rho)$$

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho$$

$$p = p_0 + \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \delta\rho + \cdots = p = p_0 + \kappa\delta\rho$$

$$\kappa = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0$$

と近似する。

9.2 音波

また、渦なしを仮定し、

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}\Phi$$

を用いる。連続の式は、$\delta\rho\mathbf{v}$の項を無視して

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\rho + \rho_0 \mathrm{div}\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t}\delta\rho + \rho_0 \Delta\Phi = 0$$

オイラー方程式は、非線形項を無視して

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\Phi = -\mathrm{grad}p = -\mathrm{\kappa grad}\delta\rho$$

整理すると

$$\mathrm{grad}\left[\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \kappa\delta\rho\right] = 0$$

この2式から

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \kappa\Delta\Phi = 0$$

9.2 音波

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \kappa \Delta \Phi = 0$$

から、この波動の速度cは

$$c^2 = \kappa = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0$$

で与えられることがわかる。
理想気体で断熱変化を仮定するとpV^γ(γは比熱比）が一定となるので、

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

従って、

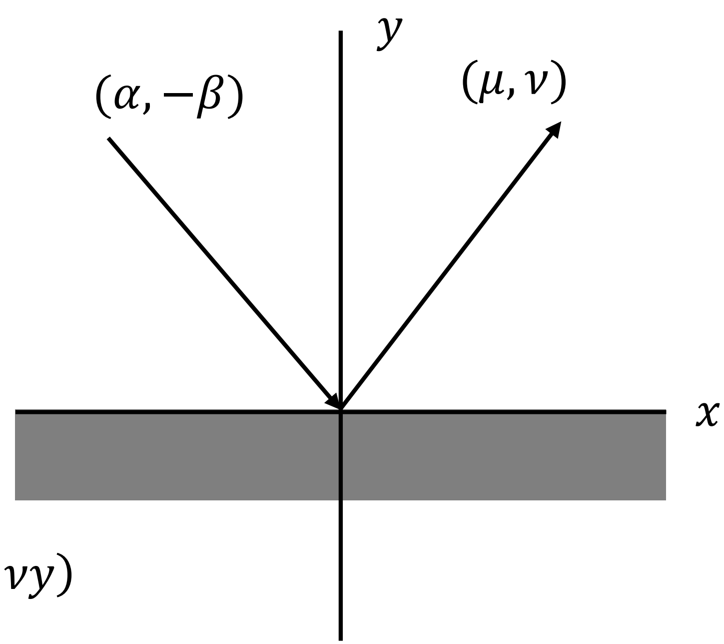
$$c^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = \gamma \frac{RT}{M}$$

となる（Mはモル質量）。
乾燥空気（０℃、１気圧）音速：$c = 331.45\,\mathrm{m/s}$

$$M = 29.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}、\gamma = 1.4 \to \sqrt{\gamma RT/M} = 331.0\,\mathrm{m/s}$$

9.2 音波

音波の反射を扱う。



入射波　$\Phi_i = A\cos(\omega t - \alpha x + \beta y)$

反射波　$\Phi_r = B\cos(\omega t - \mu x - \nu y)$

全体の速度ポテンシャル

$$\Phi = A\cos(\omega t - \alpha x + \beta y) + B\cos(\omega t - \mu x - \nu y)$$

境界条件

$$y = 0 \to v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \mu^2 + \nu^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\beta A\sin(\omega t - \alpha x + \beta y) + \nu B\sin(\omega t - \mu x - \nu y)$$

$$-\beta A\sin(\omega t - \alpha x) + \nu B\sin(\omega t - \mu x) = 0 \to$$
$$\alpha = \mu, \beta A = \nu B \to \nu = \pm\beta, B = \pm A$$

意味のある解$\nu = \beta, B = A$　もう一方は$\Phi = 0$

9.2 音波

全体の速度ポテンシャル

$$\Phi = A\cos(\omega t - \alpha x + \beta y) + A\cos(\omega t - \alpha x - \beta y) = 2A\cos(\omega t - \alpha x)\cos\beta y$$

境界での反射では、

変位でみると 0 なので、固定端

密度で考えると

$$\delta\rho = -\frac{\rho_0}{\kappa}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{2\omega A\rho_0}{\kappa}\sin(\omega t - \alpha x)\cos\beta y$$

$y = 0$では振幅が最大になるので、自由端

上記のように考えないといけない。

10 渦定理

完全流体に対しては，渦に関してのいくつかの定理が知られている

ケルビンの循環定理
ラグランジュの渦定理
ヘルムホルツの渦定理

10.1 ケルビンの循環定理

完全流体に関して，循環のラグランジュ微分を考える

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\oint \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}\right) \tag{139}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\oint \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}\right) = \oint \frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + \oint \mathbf{v}\cdot \frac{\mathrm{D}\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{D}t} \tag{140}$$

$$\frac{\mathrm{D}\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{D}t} = \mathrm{d}\frac{\mathrm{D}\mathbf{s}}{\mathrm{D}t} = \mathrm{d}\mathbf{v} \tag{141}$$

10.1 ケルビンの循環定理

式(17) のオイラー方程式に，圧力関数と体積力に対するポテンシャルを用いると

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\mathrm{grad}\,(P+\Lambda) \qquad (142)$$

式(140) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t} &= -\oint \mathrm{grad}\,(P+\Lambda)\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + \oint \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{v} \\ &= -\oint \mathrm{d}(P+\Lambda) + \oint \mathrm{d}(v^2/2) = 0\end{aligned} \qquad (143)$$

これらの物理量(P, Λ, v)は，空間の一価関数→この周回積分は0
循環の値は時間的に一定。すなわち，完全流体が式(142) を満たす場合，循環は保存量となる．これをケルビンの循環定理という．

10.2 渦度方程式

循環は保存量，渦度ベクトル自身の時間変化？
渦度ベクトルのラグランジュ微分

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathrm{grad}\,)\boldsymbol{\omega} \qquad (144)$$

式(27) の回転を計算 $\quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\left(\frac{v^2}{2} + P + \Lambda\right) + \mathbf{v} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{v} \qquad (27)$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) \qquad (145)$$

$\mathrm{rot\,grad} = 0$ より

直交座標で計算する場合に成り立つ公式

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}\mathrm{div}\,\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathrm{div}\,\mathbf{A} \\ - (\mathbf{A} \cdot \mathrm{grad}\,)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \mathrm{grad}\,)\mathbf{A}\end{aligned} \qquad (146)$$

$\mathrm{div}\boldsymbol{\omega} = \mathrm{div\,rot}\mathbf{v} = 0$ より

$\mathrm{rot}(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) = -\boldsymbol{\omega}\mathrm{div}\,\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{grad})\mathbf{v}$

10.2 渦度方程式

整理すると

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{D}t} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,)\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}\mathrm{div}\,\mathbf{v} \qquad (147)$$

オイラーの連続の式から

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) = \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \qquad (148)$$

さらに整理すると

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{D}t} - \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{\omega} = \rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,)\mathbf{v} \quad (149)$$

渦度ベクトルの時間変化を決める方程式で渦度方程式

10.3 ラグランジュの渦定理

渦度方程式：時間に関して1階の微分方程式

もし，はじめ$\boldsymbol{\omega} = 0$ならば、この解はそのまま$\boldsymbol{\omega} = 0$を保つ.

→渦が勝手に生成されることはない.

また，最初，$\boldsymbol{\omega} \neq 0$であれば$\boldsymbol{\omega} = 0$となることはない
→$\boldsymbol{\omega} \neq 0$を保ち消滅することはない.

完全流体に対しては、渦のあるなしが絶対的な意味を持つ.

ラグランジュの渦定理とか渦の不生不滅定理とか呼ばれている.

10.4 ヘルムホルツの渦定理

ヘルムホルツは，完全流体中の渦の運動に関して,

1. 渦線を構成する流体粒子は，時間が経過しても同じ渦線を構成する.

2. 渦管の強さは時間が経過しても，変化しない.

ことを示した．これを**ヘルムホルツの渦定理**という.

11 粘性流体

ここからは，粘性と呼ばれる性質を持つ流体を扱う．

11.1 変形速度テンソルとニュートン流体

流体の運動は，一様な流れ以外に局所的な変形を持つ．
この変形を表す量が変形速度テンソルe_{ij}

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{157}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \begin{cases} \text{対称成分：} e_{ij} \\ \text{反対称成分：渦度ベクトル} \end{cases}$$

11.1 変形速度テンソルとニュートン流体

流体中の応力テンソルが変形速度テンソルの1次関数になるような流体をニュートン流体という

$$t_{ij} = \Lambda_{ijkl} e_{kl} + p_{ij} \tag{158}$$

流体は等方的：$p_{ij} = -p\delta_{ij}$　かつ

$$\Lambda_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk} \tag{159}$$

という形に限られる．これを代入すると

$$t_{ij} = a\delta_{ij}e_{ll} + (b + c)e_{ij} - p\delta_{ij} \tag{160}$$

e_{ll}は対角成分の和、トレース

11.1 変形速度テンソルとニュートン流体

また，$e_{ll} = \mathrm{div}\,\mathbf{v}$ なので，整理して

$$t_{ij} = \lambda\delta_{ij}\mathrm{div}\,\mathbf{v} + 2\eta e_{ij} - p\delta_{ij} \qquad (161)$$

η はせん断粘性率，λは第2粘性率と呼ばれる．

テンソルの対角和から

$$t_{ll} = -3p + (3\lambda + 2\eta)\mathrm{div}\,\mathbf{v} \qquad (162)$$

$\chi = \lambda + 2\eta/3$は体積変化に対する粘性→体積粘性率

非圧縮性流体では， $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$ なので，通常，粘性率というとηを指す．

11.1 変形速度テンソルとニュートン流体

一般に粘性率は流体の物性で決まり，温度の関数となる．

粘性率→次元をもつ量：単位　$\mathrm{Pa \cdot s = kg/(m \cdot s)}$

従来（cgs系）：P (ポアズ) $= \mathrm{g/(cm \cdot s)}$

$$\frac{1}{100}\mathrm{P} = \mathrm{cP}\ (\text{センチポアズ})$$

例：水
$0℃$　$1.8 \times 10^{-3}\ \mathrm{Pa \cdot s}$
$20℃$　$1.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{Pa \cdot s} \rightarrow 1\ \mathrm{cP}$
$100℃$　$0.3 \times 10^{-3}\ \mathrm{Pa \cdot s}$

例：空気（1気圧）
$0℃$　$1.7 \times 10^{-5}\ \mathrm{Pa \cdot s}$
$20℃$　$1.8 \times 10^{-5}\ \mathrm{Pa \cdot s}$
$100℃$　$2.3 \times 10^{-5}\ \mathrm{Pa \cdot s}$