

連続体の力学

第4回

内容

- 2次元流
- 複素速度ポテンシャル
- 等角写像

8 2 次元流

2次元流 $v_z = 0$ で、 \mathbf{v} が x と y だけの関数.

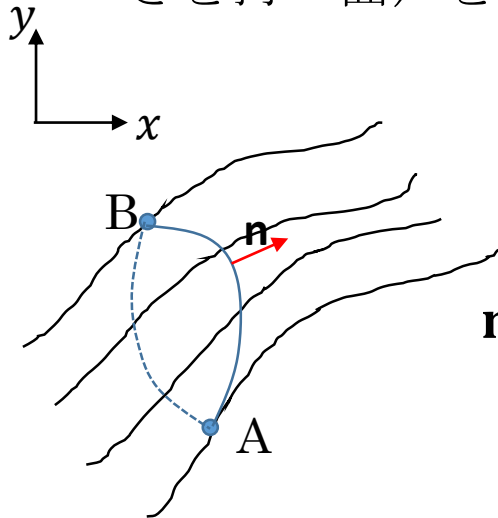
非圧縮性を仮定すると,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (56)$$

が成り立つ.

8.1 流れの関数

2つの点を結ぶある線（実際にはz方向には一様な単位長さの深さを持つ面）を通過する流量（密度は定数なので省略）：



$$Q = \int_A^B \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \quad (57)$$

\mathbf{n} は点AとBを結ぶ曲線の法線ベクトル

$$\mathbf{n} ds = (dy, -dx) \quad (58)$$

AとBを結ぶ2つの経路を考え閉曲線を作ると，グリーンの定理から

$$\oint (v_x dy - v_y dx) = \int \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (59)$$

非圧縮性流体では必ず0

8.1 流れの関数

Q は積分する経路によらず端の点だけで決まる.

このことは, ある関数 $\Psi(x, y)$ が存在し

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (60)$$

と書けることを意味する. この Ψ を流れの関数という.
渦度を計算すると, x と y 成分は0で,

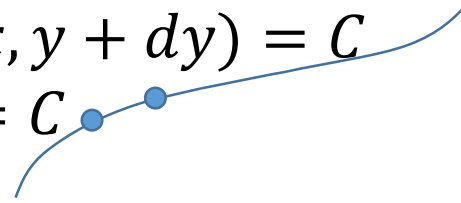
$$\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\Delta \Psi \quad (61)$$

渦なしの場合には, $\omega_z = 0$ なので, Ψ は調和関数

8.1 流れの関数

$\Psi(x, y) = C$ のは曲線を表す.

$$\Psi(x + dx, y + dy) = C$$

$$\Psi(x, y) = C$$


曲線の接線を考えると,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = -v_y dx + v_x dy = 0 \quad (62)$$

$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$ 流線の方程式

から, 接線が速度ベクトルに平行 \rightarrow この曲線は流線.

8.2 渦なしの流れと複素速度ポテンシャル

渦なしを仮定すると，速度ポテンシャル Φ により

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (63)$$

非圧縮性ならば $\Delta \Phi = 0$

Φ も Ψ も偏微分が速度ベクトルを与える

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (64)$$

解析関数におけるコーシー・リーマンの関係を表す。

$\zeta = x + iy$ とすると

$$f(\zeta) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \quad (65)$$

ζ の解析関数となる．この $f(\zeta)$ は複素速度ポテンシャルと呼ばれ，2次元の非圧縮性ポテンシャル流を決定する

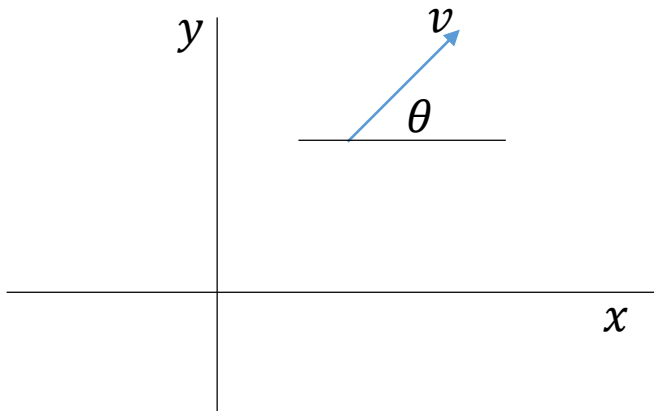
8.2 渦なしの流れと複素速度ポテンシャル

適当な解析関数を見つけることで、流れを表すことができる。

微分を考えると

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi}{\partial x} = v_x - iv_y = v \exp(-i\theta) \quad (66)$$

$$v_x = v \cos \theta, \quad v_y = v \sin \theta$$



8.3 複素速度ポテンシャルの例

8.3.1 一様流

$$f(\zeta) = Ue^{-i\alpha\zeta} \quad (67)$$



$$\frac{df(\zeta)}{d\zeta} = Ue^{-i\alpha} \quad (68)$$

x 軸と角 α をなす一様な流れを表す

8.3 複素速度ポテンシャルの例

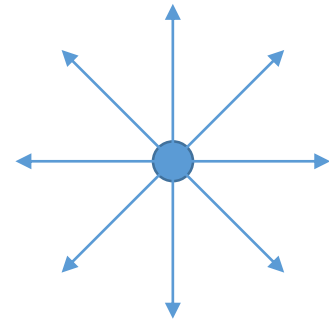
8.3.2 湧き出しと循環

$$f(\zeta) = \frac{q}{2\pi} \log \zeta \quad (69) \quad \longrightarrow \quad \frac{df(\zeta)}{d\zeta} = \frac{q}{2\pi\zeta} \quad (70)$$

流れの関数は、 $\zeta = |\zeta| \exp(i\theta)$ と書けば

$$\Psi = \frac{q\theta}{2\pi} \quad (71) \quad \longrightarrow$$

流線は $\theta = c$ で原点から放射状に伸びる直線



原点を囲む曲線で流量を計算すると $\oint d\Psi = q \quad (72)$

原点の特異点→流れの関数が多価関数

原点から流れが湧き出している

領域内に複数の湧き出し $\oint d\Psi = \sum q_i = Q_c \quad (73)$

8.3 複素速度ポテンシャルの例

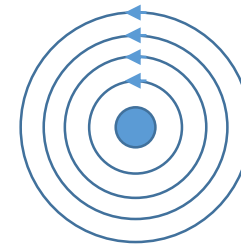
$$f(\zeta) = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \log \zeta \quad (74) \quad \Rightarrow \quad \frac{df(\zeta)}{d\zeta} = -i\frac{\Gamma}{2\pi\zeta} \quad (75)$$

$$\Phi = \frac{\Gamma\theta}{2\pi} \quad (76)$$

$$\Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log |\zeta|$$

速度ポテンシャルが多価関数→循環が存在

$$\oint d\Phi = \Gamma \quad (77)$$



複数の循環が存在すれば

$$\oint d\Phi = \sum \Gamma_i = \Gamma_c \quad (78)$$

ある領域で閉曲線を考えた場合にその一周での変化は

$$\oint \frac{df}{d\zeta} d\zeta = \oint d\Phi + i \oint d\Psi = \Gamma_c + iQ_c \quad (79)$$

f が正則なら、この積分は0

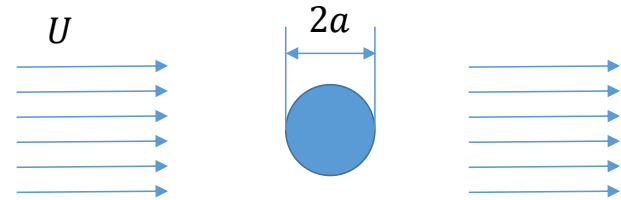
8.4 円柱の回りの流れ

3次元で球の回りの流れを扱ったが、2次元では円柱の回りの流れがこれに相当する。ただ、大きな違いは、円柱の存在によって流れの存在する領域が単連結ではなくなる点である。そのため、渦なしの流れでも円柱を囲む曲線に沿っての循環が存在しうる。

8.4.1 一様な流れの中の円柱

一様な流れがx方向に存在

円柱が存在しなければ $\rightarrow f(\zeta) = U\zeta$



円柱の存在により、新たな流れが生じる。

$$f(\zeta) = U\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\zeta^n} + c_0 \log \zeta \quad (80)$$

負の冪のみ \rightarrow 円柱の影響は無限遠では消える

対数の項 \rightarrow 循環の存在 (湧き出しはないので c_0 は純虚数) .

8.4 円柱の周りの流れ

境界条件は, $|\zeta| = a$ で $v_n = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta = 0$ である.

$$\begin{aligned} v_n &= \operatorname{Re} \left[\frac{df}{d\zeta} \frac{\zeta}{|\zeta|} \right] & \frac{df}{d\zeta} \frac{\zeta}{|\zeta|} &= (v_x - iv_y)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ & & &= v_x \cos \theta + v_y \sin \theta + i(v_x \sin \theta - v_y \cos \theta) \\ &= U \cos \theta - \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc_n e^{-in\theta}}{|\zeta|^{n+1}} \right] & (81) \end{aligned}$$

フーリエ級数の形をしているので $|\zeta| = a$ を代入して $v_n = 0$ が成り立つためには

$$c_1 = Ua^2 \quad (82)$$

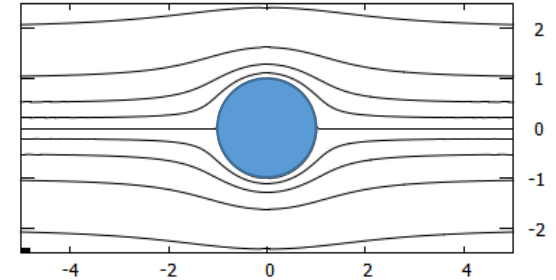
この条件からは $\operatorname{Im}[c_0]$ の値は決まらない ($\operatorname{Re}[c_0] = 0$).

循環の定義から $c_0 = -i\Gamma/(2\pi)$ であり, 条件として与える必要がある

完全流体では循環は保存され、初期条件の値を保持する (後述)

8.4 円柱の周りの流れ

$$f(\zeta) = U\zeta + \frac{Ua^2}{\zeta} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \xi$$



流れの圧力：ベルヌーイの定理から（無限遠で速度は U 、圧力は p_0 ）

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho(U^2 - v^2) \quad (83)$$

円柱表面では速度は接線成分 v_θ のみ

$$v_\theta = \frac{1}{|\zeta|} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (84)$$

したがって、

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho [2U \sin \theta - \Gamma/(2\pi a)]^2 \quad (85)$$

8.4 円柱の回りの流れ

円柱に働く力 \mathbf{F} を求める.

流れに平行な成分は

$$F_x = -a \int_0^{2\pi} p \cos \theta d\theta = 0 \quad (86)$$

ダランベールのパラドックスが成り立つ

流れに垂直な成分は

$$F_y = -a \int_0^{2\pi} p \sin \theta d\theta = -\rho U \Gamma \quad (87)$$

循環が存在すると力が働く

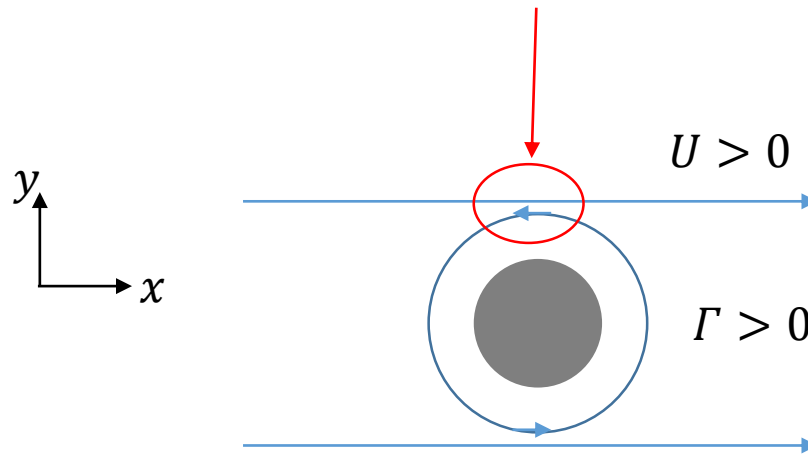
揚力と呼ばれる力で、循環に働く揚力が $\rho \Gamma U$ で与えられる
という **クッタ・ジューコフスキーの定理**が成り立つ

8.4 円柱の回りの流れ

循環を持つ流れでは，円柱の表面に沿った流れで，一様な流れで生じる対称な流れと重ね合わせると， y 軸の正と負により流速が異なるようになる．この流速の差が圧力差となり，揚力が発生する．

$\Gamma > 0$ は左回りの流れを表す．したがって， $y > 0$ の方が流速が遅く，ベルヌーイの定理から圧力が高くなる．そのため， y 軸で負の向きに力を受ける．

流速：遅い→圧力：大→下向きの力



8.5 等角写像

解析関数を与えるとそれを複素速度ポテンシャルとして持つ流れが表現される。

一般に解析関数はある複素平面から別の複素平面への写像と考えられ、また、角度が保存されるため、等角写像と呼ばれる。

$$\zeta = g(\eta)$$

ξ 平面上の3つの点、 $P : \eta$ 、 $Q : \eta + \delta\eta$ 、 $Q' : \eta + \delta\eta'$ が、 $g(\eta)$ で ζ 平面上の点 $R : \zeta$ 、 $S : \zeta + \delta\zeta$ 、 $S' : \zeta + \delta\zeta'$ に写像されるとき、

$$\delta\zeta = \frac{dg}{d\eta} \delta\eta, \quad \delta\zeta' = \frac{dg}{d\eta} \delta\eta'$$

が成り立つ。 $|\delta\eta| = |\delta\eta'|$ として、線分PQとPQ'のなす角を ϕ として

$$\delta\eta' = \delta\eta \exp(-i\phi)$$

とすると、 $\frac{dg}{d\eta} \neq 0$ ならば、

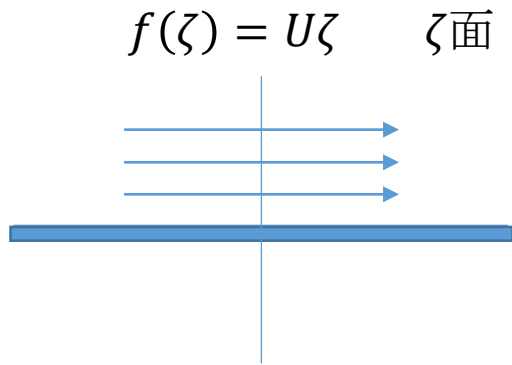
$$\delta\zeta' = \delta\zeta \exp(-i\phi)$$

が成り立ち、線分RSとRS'のなす角は ϕ に等しい。

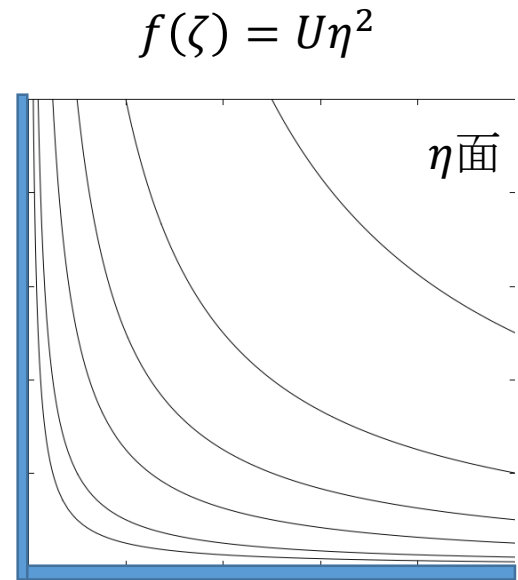
8.5 等角写像

ある面内での流れの複素速度ポテンシャルが得られた時、等角写像で別の平面に写像すると、境界との角度が維持されるので写像された面内でも正しい流れを表す。

例：平面上の一様流



$\zeta = \eta^2$

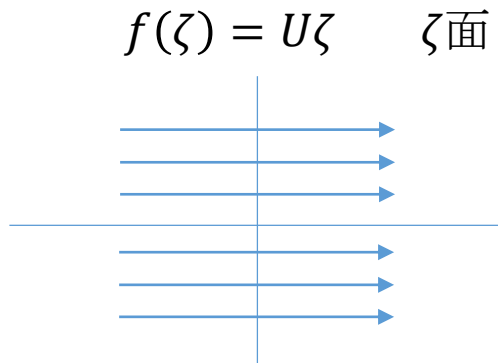


8.5 等角写像

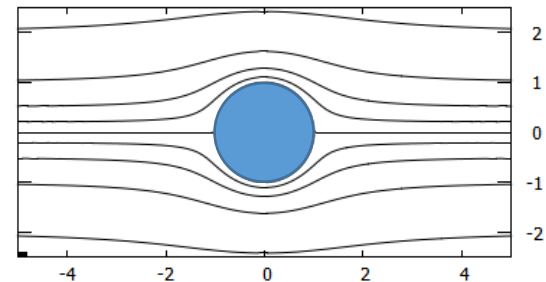
ジュークovski変換

$$\zeta = \eta + \frac{a^2}{\eta}$$

$\eta = ae^{i\theta}$ (半径 a の円周上の点) $\rightarrow \zeta = 2a \cos \theta$ (実軸上の線)



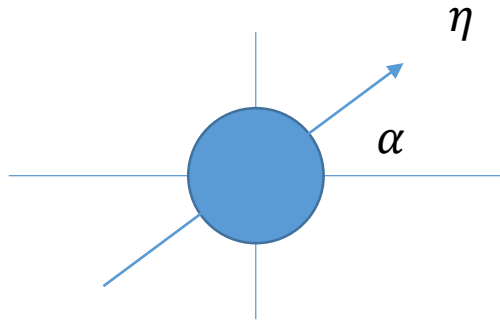
$f(\zeta) = U\left(\eta + \frac{a^2}{\eta}\right)$ η 面



半径 a の円柱の周りの流れ

8.5 等角写像

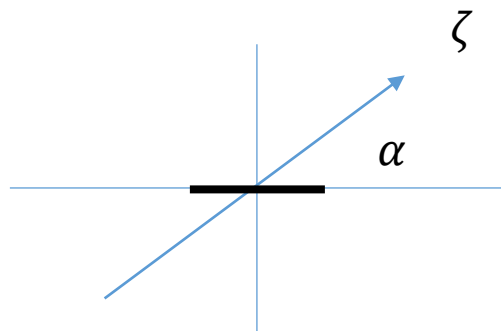
実軸と角度 α をなす流れと円柱



$$\eta' = \eta e^{-i\alpha} \quad f(\eta') = U \left(\eta' + \frac{a^2}{\eta'} \right)$$

$$f(\eta) = U \left(\eta e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{\eta} e^{i\alpha} \right)$$

これをジュークフスキー変換で ζ 面に戻すと、球は平板になるので、平に対して角度 α で当たる流れを表す。



$$\eta = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4a^2}}{2}$$

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{U}{2} \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4a^2} e^{-i\alpha} + \frac{4a^2}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4a^2}} e^{i\alpha} \right) \\ &= U \left(\zeta \cos \alpha - i \sqrt{\zeta^2 - 4a^2} \sin \alpha \right) \end{aligned}$$

8.5 等角写像

循環のある場合

$$f(\eta) = U \left(\eta e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{\eta} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \eta$$

$$f(\zeta) = U \left(\zeta \cos \alpha - i\sqrt{\zeta^2 - 4a^2} \sin \alpha \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4a^2}}{2} \right)$$

$$\frac{df}{d\zeta} = U \left(\cos \alpha - i \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 4a^2}} \sin \alpha \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4a^2}}$$

$\zeta = 2a$ で発散しないように Γ を決める。

$$\Gamma = -4\pi U a \sin \alpha$$

クッタの条件、ジューコフスキーの仮定という

8.5 等角写像

η



原点 (α, β) 、半径 b の円

$$\zeta = \eta + \frac{a^2}{\eta}$$

ζ

8.5 等角写像

$$\begin{aligned} \eta &= be^{i\theta} + \eta_0 \\ \eta_0 &= \alpha + i\beta \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \zeta = be^{i\theta} + \eta_0 + \frac{a^2}{be^{i\theta} + \eta_0}$$

実部と虚部に分けて書くと

$$\begin{aligned} x &= (b \cos \theta + \alpha) \left(1 + \frac{a^2}{b^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 2b(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)} \right) \\ y &= (b \sin \theta + \beta) \left(1 - \frac{a^2}{b^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 2b(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)} \right) \end{aligned}$$

8.5 等角写像

$$b = 1.1a, \alpha = 0, \beta = 0$$



$$b = 1.1a, \alpha = 0, \beta = 0.5$$



$$b = 1.4a, \alpha = -0.8a, \beta = 0$$



$$b = 1.1a, \alpha = -0.1a, \beta = 0.3a$$



いろいろな形の周りの流れを円柱の周りの流れに帰着できる

8.6 ブラジウスの公式

2次元の流れの中の物体に働く力は、物体の表面を表す曲線に沿っての積分、

$$F_x = - \oint p n_x ds = - \oint p dy \quad (101)$$

$$F_y = - \oint p n_y ds = \oint p dx \quad (102)$$

$$\begin{aligned} F_x - iF_y &= -i \oint p(dx - idy) \\ &= -i \oint p d\zeta^* \end{aligned} \quad (103)$$

8.6 ブラジウスの公式

複素速度ポテンシャルを用いると、圧力は

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{1}{2}\rho U_0^2 - \frac{\rho}{2}v^2 \\ &= p_0 + \frac{1}{2}\rho U_0^2 - \frac{\rho}{2} \left| \frac{df}{d\zeta} \right|^2 \end{aligned} \quad (104)$$

$p_0 + \rho U_0^2/2$ は定数なので

$$\oint (p_0 + \rho U_0^2/2) d\zeta^* = 0 \quad (105)$$

よって

$$F_x - iF_y = i \oint \frac{\rho}{2} \left| \frac{df}{d\zeta} \right|^2 d\zeta^* \quad (106)$$

ところで

$$\left| \frac{df}{d\zeta} \right|^2 d\zeta^* = \frac{df}{d\zeta} \frac{df^*}{d\zeta^*} d\zeta^* = \frac{df}{d\zeta} df^* \quad (107)$$

8.6 ブラジウスの公式

また、物体の表面は流線となるから、 $d\Psi = 0$ である。したがって、 $df^* = d\Phi = df$ である。よって、

$$\oint \left| \frac{df}{d\zeta} \right|^2 d\zeta^* = \oint \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 d\zeta \quad (108)$$

すなわち、

$$F_x - iF_y = i\frac{\rho}{2} \oint \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 d\zeta \quad (109)$$

ところで、 $\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2$ は ζ の解析関数なので、特異点の存在しない領域では、自由に積分路を変更できる。したがって、曲線は物体を囲む任意の閉曲線で積分すればよい（物体と曲線で囲まれた領域に特異点が存在しないという条件のもとで）。この公式を**ブラジウスの第一公式**という。

8.6 ブラジウスの公式

力のモーメントについても同様な計算をする

$$\begin{aligned} M_z &= \oint p(xdx + ydy) \\ &= -\frac{\rho}{2} \oint v^2(xdx + ydy) \end{aligned} \quad (110)$$

$$\begin{aligned} \zeta d\zeta^* &= (x + iy)(dx - idy) \\ &= xdx + ydy + i(ydx - xdy) \end{aligned} \quad (111)$$

$$v^2(xdx + ydy) = \operatorname{Re}[v^2 \zeta d\zeta^*] = \operatorname{Re} \left[\frac{df}{d\zeta} \zeta df^* \right] \quad (112)$$

ブラジウスの第二公式

$$M_z = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left[\oint \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 \zeta d\zeta \right] \quad (113)$$