

連続体の力学

第3回

内容

- ポテンシャル流
- 鏡像法
- ストークスの流れの関数

7 ポテンシャル流

非圧縮性流体の渦なしの流れ

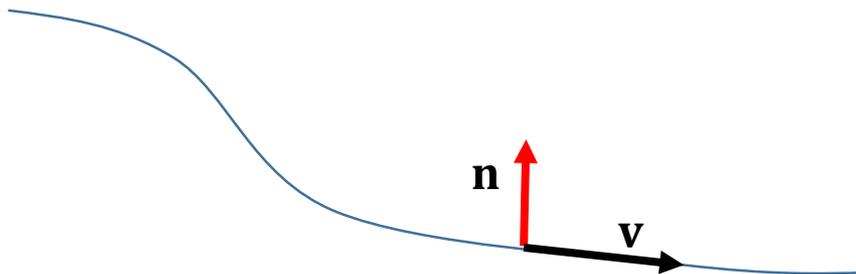
速度ポテンシャルは

$$\Delta\Phi = 0$$

で表され、調和関数となる。

境界条件：完全流体では境界（表面）において、速度の法線成分が0

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \text{grad}\Phi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$$



7.1 湧き出しと吸い込み

調和関数で一番簡単なものは

$$\Phi = -\frac{k}{r} \quad (35)$$

($r = 0$ は特異点であるので除外) .

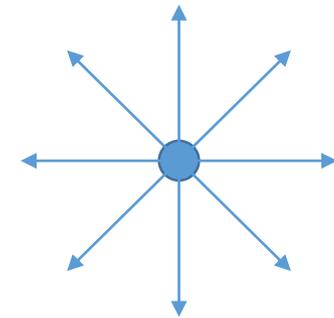
速度ベクトルは

$$\mathbf{v} = \frac{k\mathbf{r}}{r^3} \quad (36)$$

は球対称な流れを表す.

$k > 0$ なら中心から外に向かう流れで湧き出し

$k < 0$ は中心に向かう流れで、吸い込み



$k > 0$

この場の様子は電磁気学における点電荷の作る電場と同様である.

7.2 二重湧き出し

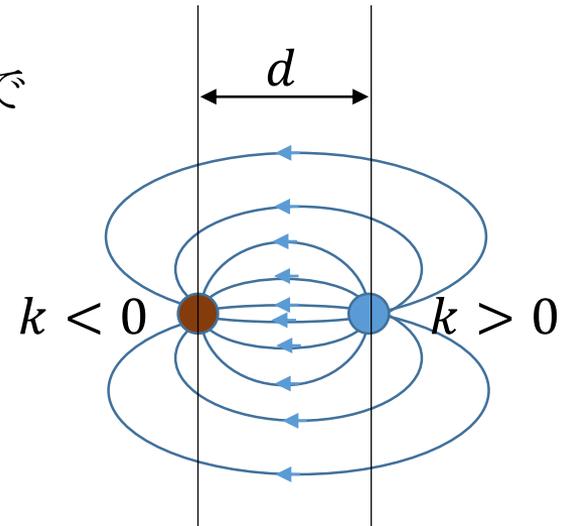
単純湧き出しと吸い込みが近接して存在する場合で

$$\Phi = -\frac{kd \cos \theta}{r^2} \quad (37)$$

で表される.

これは、電気双極子モーメントの作る場と対応がつく.

これらの流れは、静電場に対するラプラス方程式の解を多重極展開するのと同じ.



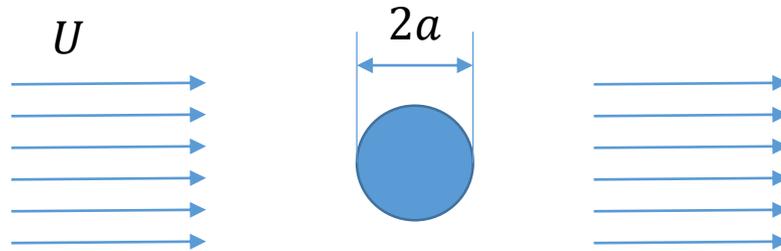
7.3 一様流に球を入れた場合の流れ

z 方向に一様な流れが存在するときの速度ポテンシャルは

$$\Phi = Uz \quad (38)$$

である.

この流れの中に半径 a の球を入れると流れに変化が起きる.



この流れは二重湧き出しを追加することで実現

$$\Phi = Uz + \frac{A \cos \theta}{r^2} \quad (39)$$

7.3 一様流に球を入れた場合の流れ

境界条件: $r = a$ で球面に垂直な速度成分が0

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = U \cos \theta - 2 \frac{A \cos \theta}{r^3} \quad (40)$$

なので、

$$A = \frac{Ua^3}{2} \quad (41)$$

となり

$$\Phi = U \cos \theta \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \quad (42)$$

が得られる。

7.3 一様流に球を入れた場合の流れ

ラプラス方程式を解く。球面座標でのラプラス演算子は

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

対称性から、 $\Phi = R(r)P(\theta)$ として、変数分離すると

$$P \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rR)}{\partial r^2} + R \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial P}{\partial\theta} \right) = 0$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial P}{\partial\theta} \right) = -l(l+1)P$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(rR)}{\partial r^2} = R \frac{l(l+1)}{r^2}$$

$P = P_l(\cos\theta)$: ルジャントルの多項式

$$R = a_l r^l + b_l r^{-(l+1)}$$

7.3 一様流に球を入れた場合の流れ

ルジャントルの多項式： $P_n(x)$

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + n(n+1)P = 0$$

の解で、 $x = \pm 1$ で正則なものは n が非負整数の時で、

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \dots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)y^n \quad (-1 < x < 1, |y| < 1)$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$

7.3 一様流に球を入れた場合の流れ

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l r^l + b_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta)$$

境界条件

$$r \rightarrow \infty \quad \Phi \rightarrow Ur \cos \theta \quad a_1 = U \quad a_l = 0 \quad (l \neq 1)$$

$$r = a \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad a_1 - \frac{2}{a^3} b_1 = 0 \quad b_l = 0 \quad (l \neq 1)$$

であり、

$$\Phi = U \cos \theta \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right)$$

が得られる。

7.3 一様流に球を入れた場合の流れ

定常流：ベルヌーイの定理で圧力を計算する

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\sin \theta U \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \quad (43)$$

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = U^2 \left[\left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right)^2 + 3 \frac{a^3}{r^3} \sin^2 \theta \left(1 - \frac{a^3}{4r^3} \right) \right] \quad (44)$$

$r \rightarrow \infty$ で $v \rightarrow U$ 、 $p \rightarrow p_0$

$$\frac{1}{2} U^2 + \frac{p_0}{\rho} = \frac{1}{2} U^2 \left[\left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right)^2 + 3 \frac{a^3}{r^3} \sin^2 \theta \left(1 - \frac{a^3}{4r^3} \right) \right] + \frac{p}{\rho} \quad (45)$$

7.3 一様流に球を入れた場合の流れ

したがって,

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \left[\left(2 - \frac{a^3}{r^3} \right) - 3 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{a^3}{4r^3} \right) \right] \frac{a^3}{r^3} \quad (46)$$

球が流体から受ける力はz成分を計算すると（残りの成分は対称性から0）

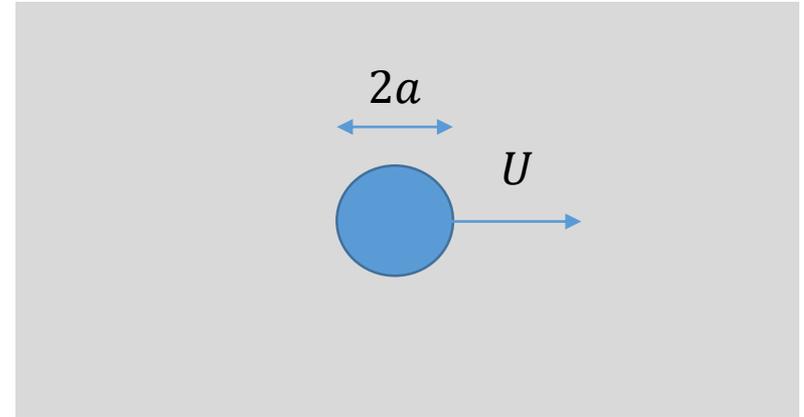
$$p(r = a) = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right)$$
$$F_z = -2\pi a^2 \int_0^\pi p(r = a) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0 \quad (47)$$

渦なしの完全流体中の物体は力を受けないという **ダランベールのパラドックス** と呼ばれているものの一例

7.4 静止流体中を運動する球の回りの流れ

$r \rightarrow \infty$ で $v \rightarrow 0$

$$\Phi = \frac{A \cos \theta}{r^2} \quad (48)$$



境界条件は、球が速度 U で運動しているのに、その法線方向の速度は $U \cos \theta$

$$\Rightarrow A = -\frac{Ua^3}{2}$$

$$\Phi = -\frac{Ua^3 \cos \theta}{2r^2} \quad (49)$$

式(42) の流れを z 方向に U で運動する座標系で眺めた時の解に等価ただし、球は $-U$ で運動しているのに、符号が反対

7.4.1 誘導質量

式(49) で表される流体の持つ運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2} \int \rho v^2 dV \quad (50)$$

速度ポテンシャルを用いると

$$K = \frac{1}{2} \int \rho (\text{grad } \Phi)^2 dV \quad (51)$$

$$\begin{aligned} (\text{grad } \Phi)^2 &= \text{div} (\Phi \text{grad } \Phi) - \Phi \Delta \Phi \\ &= \text{div} (\Phi \text{grad } \Phi) \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int \rho \text{div} (\Phi \text{grad } \Phi) dV \\ &= \frac{1}{2} \int \rho \Phi \text{grad } \Phi \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (53)$$

と境界の値で表すことができる

7.4.1 誘導質量

流体中を運動する球の場合，十分遠方では Φ も $\text{grad}\Phi$ も0
球の表面だけで計算すると(この時、法線は球の内向きが正)

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\rho \int_0^\pi 2\pi a^2 \sin\theta d\theta U^2 a \cos^2\theta / 2 \\ &= \frac{1}{2}\rho \frac{2\pi}{3} a^3 U^2 \end{aligned} \quad (54)$$

流体中の球の運動に付随した運動エネルギー → 球の質量が

$$M_{\text{induced}} = \frac{2\pi}{3} a^3 \rho \quad (55)$$

だけ，増えたように振る舞う。

7.4.1 誘導質量

球が加速度運動する場合には、球の速度変化に応じて、流体の速度も瞬時に変化する（速度を決めるラプラス方程式には時間はパラメータとして含まれるだけであるので、変化は瞬時に伝わる）。これは、流体に対して非圧縮性を仮定したためである。

このように流体中を物体が運動するときは、流体の慣性の影響で質量が増加して見える。この増加分 M_{induced} を誘導質量または仮想質量という。

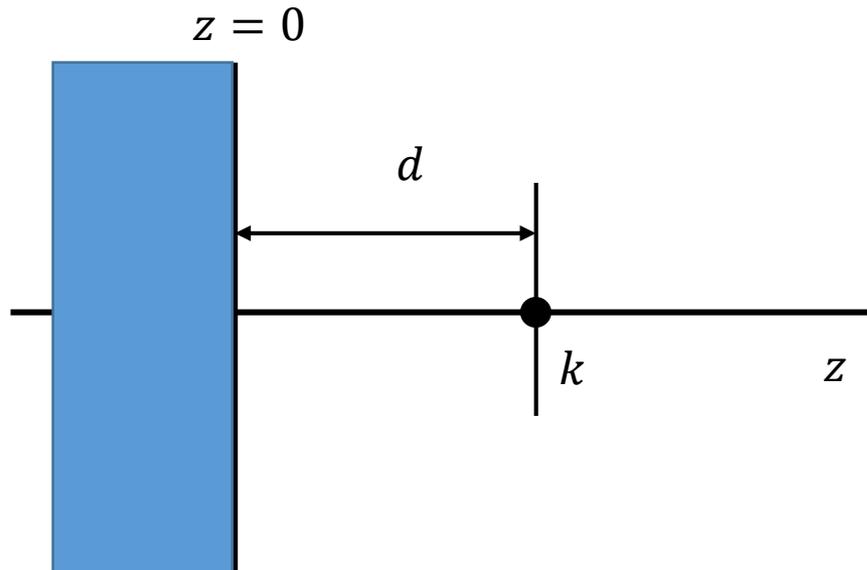
誘導質量は物体の形状に依存している。

7.5 鏡像法

特定の境界条件の下でラプラス方程式の解を求める際、境界面を置く代わりに鏡像となる湧き出し等を置くことで、境界条件を満たす方法

例：平面境界から距離 d , だけ離れたところに強さ k の湧き出しを置く

境界を $x - y$ 面、湧き出しを通る法線を z 軸とする。

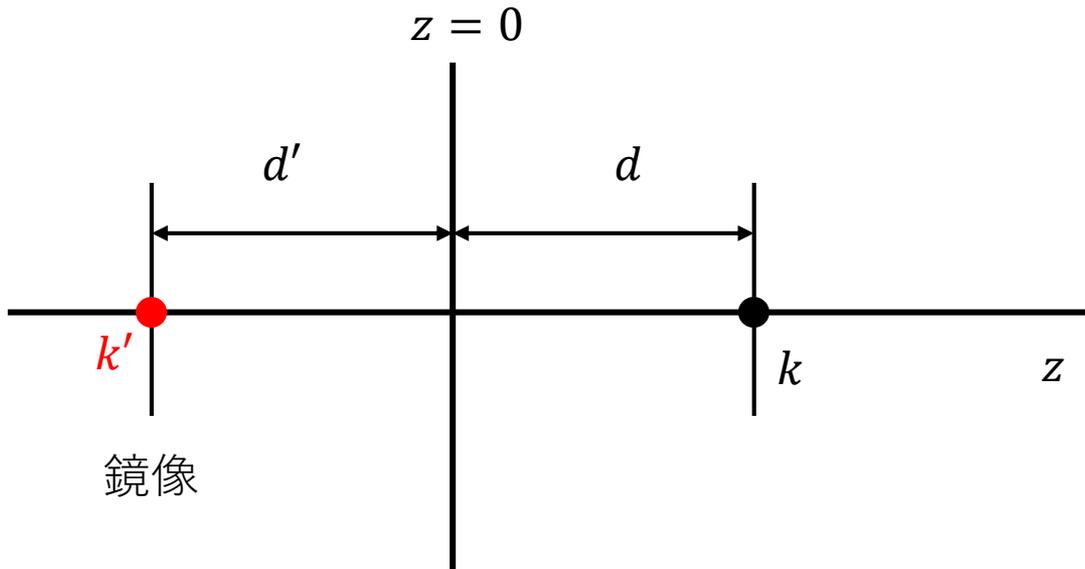


7.5 鏡像法

境界がないときの速度ポテンシャル

$$\Phi_0 = -\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}}$$

境界条件： $z = 0$ で $v_z = 0$



7.5 鏡像法

鏡像の速度ポテンシャル

$$\Phi_1 = -\frac{k'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d')^2}}$$

全体のポテンシャル

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 = -\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{k'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d')^2}}$$

境界条件

$$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} (z = 0) = 0$$

$$\frac{kd}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}\right)^3} = \frac{k'd'}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + d'^2}\right)^3} \rightarrow k = k', d = d'$$

7.5 鏡像法

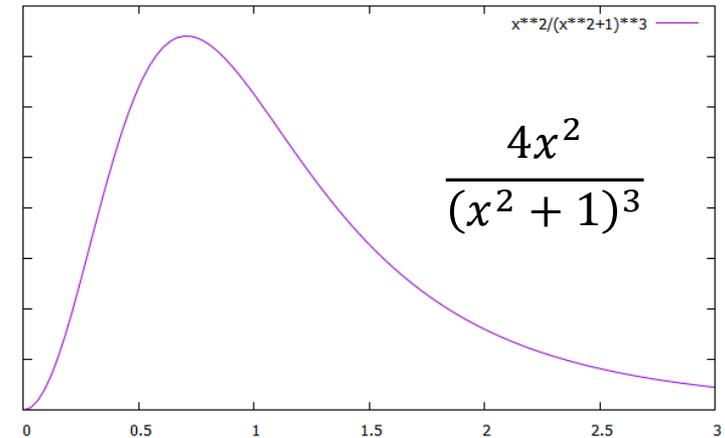
境界面上での圧力 : $r \rightarrow \infty$ で $p \rightarrow p_0$ $v \rightarrow 0$ 、

界面上で $v_z = 0$

ベルヌーイの定理を用いると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho v^2 + p &= p_0 \\ v^2(z=0) &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \\ &= \frac{4k^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + d^2)^3} \end{aligned}$$

$$p = p_0 - \rho \frac{2k^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + d^2)^3}$$



となる。面上、中心から、距離 $d/\sqrt{2}$ のところで、圧力は最小になる。

7.5 鏡像法

静電気での鏡像法との比較

静電気の場合： 境界条件は $z = 0$ で $\Phi = 0 \rightarrow q = -q', d = d'$

一様な場と球の場合

	流体	静電気
条件	一様な流れの中の球	一様な電場中の金属球
鏡像	二重湧き出し	電気双極子モーメント
境界条件	$r = a, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$	$r = a, \quad \Phi = 0$
鏡像の大きさ	$kd = -\frac{Ua^3}{2}$	$qd = 4\pi\epsilon_0 a^3 E$

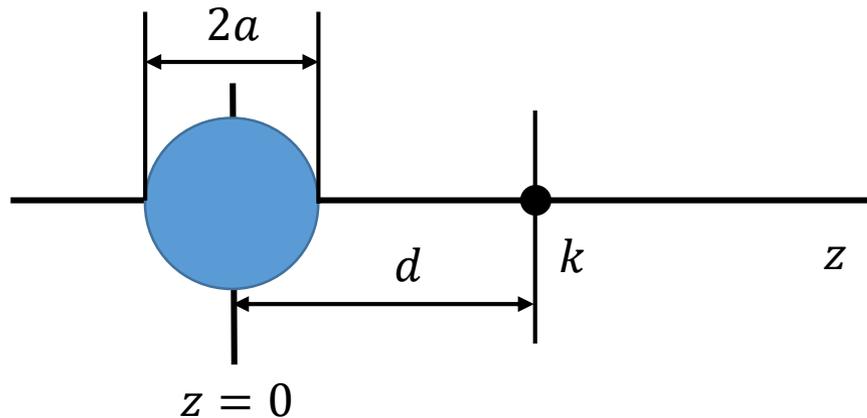
7.5 鏡像法

静電気の場合、点電荷と球は解ける。

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 = -\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a^2/d)^2}}$$

とし、 $r = a$, $\Phi = 0$ を満たすようにすると、 $q' = -aq/d$

流体の場合、単純湧き出しと球は、単純な鏡像ではない



7.5 鏡像法

$$\Phi = -\frac{k}{\sqrt{r^2 - 2rd \cos \theta + d^2}} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

とし、 $r = a$ で $\partial\Phi/\partial r = 0$ を満たすよう b_l を決める。

$a < d$ なので、球の表面での条件を考えるために $r < d$ として

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rd \cos \theta + d^2}} = \frac{1}{d} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^l P_l(\cos \theta)$$

と展開する。

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}(r = a) = -\sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{kl}{d^2} \left(\frac{a}{d}\right)^{l-1} - \frac{(l+1)b_l}{a^{l+2}} \right] P_l(\cos \theta)$$

$$b_l = \frac{kl}{a(l+1)} \left(\frac{a^2}{d}\right)^{l+1}$$

7.5 鏡像法

$$\Phi = -\frac{q}{\sqrt{r^2 - 2rd \cos \theta + d^2}} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{ql}{a(l+1)} \left(\frac{a^2}{dr}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l}{(l+1)} \left(\frac{a^2}{dr}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta)$$

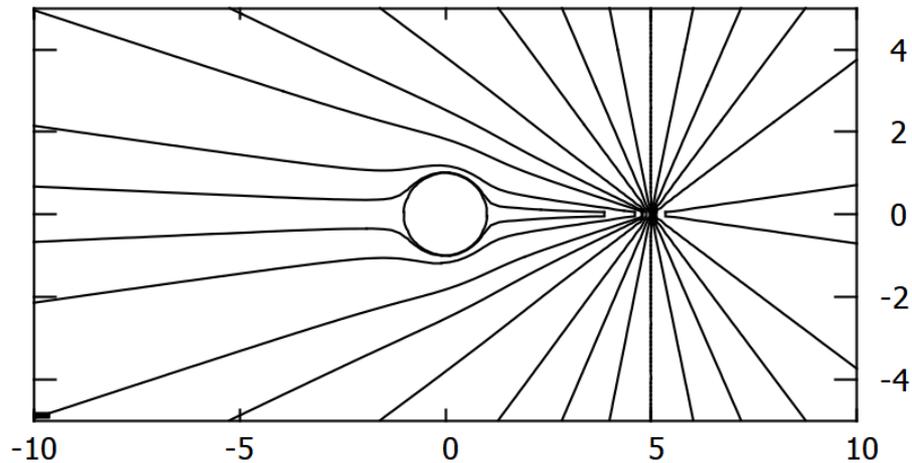
$$= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a^2}{dr}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta) - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)} \left(\frac{a^2}{dr}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a^2}{dr}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta) = \frac{a^2}{d \sqrt{r^2 - 2r \left(\frac{a^2}{d}\right) \cos \theta + \frac{a^4}{d^2}}}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)} \left(\frac{a^2}{dr}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta) = \int_0^{\frac{a^2}{dr}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x \cos \theta + 1}}$$

7.5 鏡像法

$$\Phi = -\frac{k}{\sqrt{r^2 - 2rd \cos \theta + d^2}}$$
$$-\frac{ak}{d\sqrt{r^2 - 2rd_a \cos \theta + d_a^2}} + \frac{k}{a} \int_0^{\frac{d_a}{r}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x \cos \theta + 1}}$$
$$d_a = \frac{a^2}{d}$$



7.5 鏡像法

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \frac{k(r - d \cos \theta)}{(\sqrt{r^2 - 2rd \cos \theta + d^2})^3} \\ &+ \frac{ak[r - d_a \cos \theta]}{d \left(\sqrt{r^2 - 2rd_a \cos \theta + d_a^2} \right)^3} - \frac{k d_a}{a r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rd_a \cos \theta + d_a^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} (r = a) &= \frac{k(a - d \cos \theta)}{(\sqrt{a^2 - 2ad \cos \theta + d^2})^3} \\ &+ \frac{ak[a - d_a \cos \theta]}{d \left(\sqrt{a^2 - 2ad_a \cos \theta + d_a^2} \right)^3} - \frac{k}{d} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2ad_a \cos \theta + d_a^2}} \\ &= k \frac{(a - d \cos \theta) + \frac{d^2}{a^2} \left[a - \left(\frac{a^2}{d} \right) \cos \theta \right] - \frac{1}{a} (a^2 - 2ad \cos \theta + d^2)}{(\sqrt{a^2 - 2ad \cos \theta + d^2})^3} = 0 \end{aligned}$$

7.6 ストークスの流れの関数

非圧縮性流体の3次元での軸対称な流れに対しては、ストークスの流れの関数が定義できる。円柱座標では、 $x = \xi \cos \varphi$ 、 $y = \xi \sin \varphi$ として、

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial(\xi v_R)}{\partial \xi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

と書ける ($v_\varphi = 0$ 、 $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$)。

そこで、

$$v_\xi = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial \Psi_s}{\partial z}, v_z = \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Psi_s}{\partial \xi}$$

とすれば、 $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ が成り立つ。この Ψ_s をストークスの流れの関数という。この関数は、非圧縮性流体の軸対称な流れでは完全流体でなくても存在する。また、渦なしの流れでなくてもよい。

7.6 ストークスの流れの関数

$\Psi_s = C$ は流線を表す。

$$\begin{aligned}\Psi_s(\xi + \delta\xi, z + \delta z) &= C \\ \Psi_s(\xi, z) + \frac{\partial\Psi_s}{\partial\xi}\delta\xi + \frac{\partial\Psi_s}{\partial z}\delta z &= C \\ \frac{\partial\Psi_s}{\partial\xi}\delta\xi + \frac{\partial\Psi_s}{\partial z}\delta z &= \xi(v_z\delta\xi - v_\xi\delta z) = 0 \\ \frac{\delta\xi}{v_\xi} &= \frac{\delta z}{v_z}\end{aligned}$$

渦なしの流れの場合

$$\frac{\partial v_z}{\partial\xi} - \frac{\partial v_\xi}{\partial z} = \frac{1}{\xi} \left(\frac{\partial^2\Psi_s}{\partial\xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial\Psi_s}{\partial\xi} + \frac{\partial^2\Psi_s}{\partial z^2} \right) = 0$$

符号が違うのでラプラス方程式ではない

7.6 ストークスの流れの関数

Ψ_s の例：原点の湧き出し

$$\Phi = -\frac{k}{\sqrt{\xi^2 + z^2}} \rightarrow \Psi_s = -\frac{kz}{\sqrt{\xi^2 + z^2}}$$

$$v_\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{k\xi}{\sqrt{\xi^2 + z^2}^3} = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial \Psi_s}{\partial z}$$

$$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{kz}{\sqrt{\xi^2 + z^2}^3} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Psi_s}{\partial \xi}$$

$\Psi_s = C$ は球面座標の動径 $r = \sqrt{\xi^2 + z^2}$ と $z = r \cos \theta$ を用いれば $\cos \theta = c$ を表し、原点を通る直線を表す。

7.6 ストークスの流れの関数

Ψ_s の例：一様流

$$\Phi = Uz \rightarrow \Psi_s = \frac{U}{2} \xi^2$$
$$v_\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 0 = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial \Psi_s}{\partial z}$$

$$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = U = \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Psi_s}{\partial \xi}$$

$\Psi_s = C$ は $\xi = c$ を表し、 z 軸に平行な直線を表す。

7.6 ストークスの流れの関数

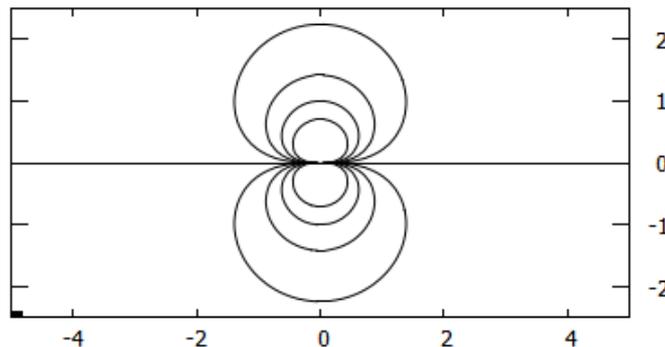
Ψ_s の例

2重湧き出し：

$$\Phi = -\frac{zkd}{\sqrt{\xi^2 + z^2}^3} \rightarrow \Psi_s = -\frac{\xi^2 kd}{\sqrt{\xi^2 + z^2}^3}$$

$$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{(2z^2 - \xi^3)kd}{\sqrt{\xi^2 + z^2}^5} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Psi_s}{\partial \xi}$$

$$v_\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{3z\xi kd}{\sqrt{\xi^2 + z^2}^5} = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial \Psi_s}{\partial z}$$

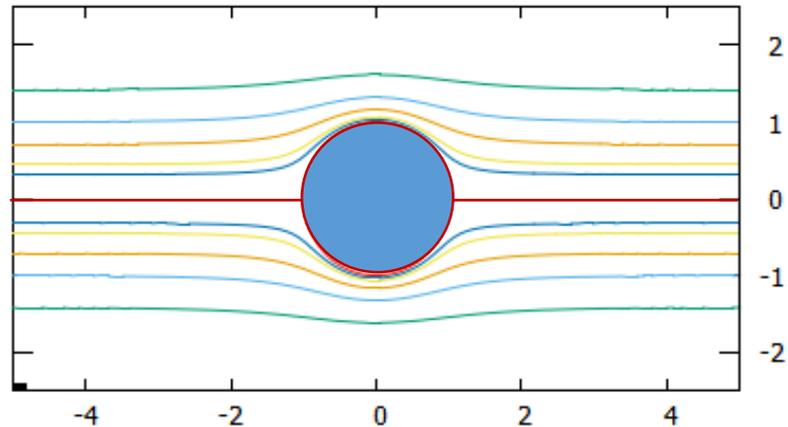


7.6 ストークスの流れの関数

Ψ_s の例

一様流中の球の周りの流れ：一様流と2重湧き出しの和

$$\Psi_s = \frac{U}{2}\xi^2 - \frac{\xi^2 U a^3}{2\sqrt{\xi^2 + z^2}^3} = \frac{U}{2}r^2 \sin^2\theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)$$



7.6 ストークスの流れの関数

球の周りの軸対称の流れ：バトラーの球定理

球の無いときの流れの関数： $\Psi_0(r, \theta)$

$$\Psi_s = \Psi_0(r, \theta) - \frac{r}{a} \left[\Psi_0\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right) - \Psi_0(0) \right]$$

とすれば、 $r = a$ で Ψ_s が一定となるので境界条件を満たす。
また、 $r \rightarrow \infty$ の時、球の影響が速やかに消滅する。

例：一様流

$$\Psi_0(r, \theta) = \frac{U}{2} r^2 \sin^2 \theta$$
$$\rightarrow \Psi_s = \frac{U}{2} r^2 \sin^2 \theta - \frac{r U a^4}{a^2 r^2} \sin^2 \theta = \frac{U}{2} r^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right)$$

7.6 ストークスの流れの関数

Ψ_s の満たす方程式 (球座標)

$$\frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi_s}{\partial \theta} \right) = 0$$

$\Psi_0(r, \theta)$ がこの方程式の解ならば、 $\frac{r}{a} \Psi_0(a^2/r, \theta)$ も解。また、 Ar も解。

そのため、 $\Psi_0(r, \theta) - \frac{r}{a} \Psi_0\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right) + Ar$ は方程式の解でかつ球面で一定という定数をとるので条件を満たす。無限遠で球の影響がなくなるように A を決めると $A = \Psi_0(0)/a$

$$\Psi_s = \Psi_0(r, \theta) - \frac{r}{a} \left[\Psi_0\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right) - \Psi_0(0) \right]$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{a} \left[\Psi_0\left(\frac{a^2}{r}, \theta\right) - \Psi_0(0) \right] = a \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} (r = 0)$$

7.6 ストークスの流れの関数

湧き出し ($z = d > a$) の場合 :

$$\Psi_0(r, \theta) = k \frac{r \cos \theta - d}{\sqrt{r^2 - 2dr \cos \theta + d^2}}$$

$$\Psi_s = k \frac{r \cos \theta - d}{\sqrt{r^2 - 2dr \cos \theta + d^2}} - k \frac{r}{a} \left[\frac{(a^2/r) \cos \theta - d}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{r}\right)^2 - 2d \left(\frac{a^2}{r}\right) \cos \theta + d^2}} + 1 \right]$$

整理すると

$$\begin{aligned} \Psi_s = & k \frac{r \cos \theta - d}{\sqrt{r^2 - 2dr \cos \theta + d^2}} \\ & + k \frac{a}{d} \frac{r \cos \theta - d_a}{\sqrt{r^2 - 2d_a r \cos \theta + d_a^2}} + k \frac{\sqrt{r^2 - 2d_a r \cos \theta + d_a^2} - r}{a} \end{aligned}$$