連続体の力学

第2回

内容

- 流体の定義
- 流線と流管
- 渦度と循環
- 渦なし流と速度ポテンシャル
- 完全流体とオイラー方程式
- ベルヌーイの定理

1 流体の定義

液体や気体は，それ自身では形が決まらない．何かの容器に入れれば，その容器を隙間無く満たす．このような性質をもつ連続体を流体という．

固体と流体の決定的な違いは，構成粒子（流体の場合，流体粒子と呼ばれる）を考えた場合には，小さな力でも粒子の変位が非常に大きくなることである．このため，流体の運動は，流体を構成する物質の運動を粒子的にとらえて記述するラグランジュ方式より，速度場を考えて運動を記述するオイラーの方法がよく用いられる．

このことは，場所と時間の関数として，流体の速度ベクトル$\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$を与えることで，流体の運動を記述する．

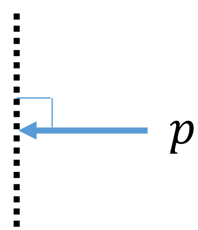
全ての場所で$\mathbf{v}=0$ の流体は静止流体，$\mathbf{v}$がtによらない流れは定常流と呼ばれる．

1 流体の定義

流体が静止しているときには流体の応力テンソルは圧力だけで表される．すなわち，

$$t_{ij} = -p\delta_{ij} \tag{1}$$

となるのである．この式の意味は，流体中の任意の面で応力を評価すると，必ず面に垂直な成分しか存在せず，いつも圧力となっているということである．



任意の断面に対して、応力はいつも垂直である。

1 流体の定義

もし，せん断応力が存在すると，面に平行な力が存在し，流体がその面に平行に運動する.

また，通常は流体中に張力（負の圧力）が存在することもない.
もし，圧力が負になると，面から流体が離れて真空のような部分が発生するはずだが，このようなことも起きない（液体の場合には、粒子間の相互作用で負の圧力が存在する場合もある）.

静止流体中では$t_{ij} = -p\delta_{ij}$となるという性質は，流体を定義する性質と考えることができる.

1.1 流体の密度と圧力

オイラーの方法で流体を記述する場合には，密度や圧力は場として扱う必要がある．また，これらの量は熱力学的な量であり，状態方程式が成り立つ．

通常，状態方程式には，温度Tが含まれ，

$$\rho = f(p, T) \qquad (2)$$

である．しかし，実際に流体の運動を議論する場合には，変化の過程を等温変化とか断熱変化のように指定して

$$\rho = f(p) \qquad (3)$$

とする．これを流体の状態方程式といい，このように表せる流体をバロトロピー流体という．バロトロピー流体の場合，密度が圧力の関数として与えられるので，圧力関数を

$$P = \int^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho} \qquad (4)$$

で定義する

1.1 流体の密度と圧力

密度が一定の流体は，非圧縮性流体と呼ばれる（単に，縮まない流体と呼ばれる）．

この性質を満たすと，オイラーの連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \mathbf{v}) = 0 \qquad (5)$$

から，$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0$ という関係が得られる．

現実の物質では，必ず密度変化があるので，非圧縮性流体の概念は近似的であるが，運動の条件によっては気体でも縮まないとして扱ってよいことが知られている．

2 流線と流管

流体の流れを考えるとき，流線という概念がよく用いられる．これは，ある曲線の接線ベクトルがその流体の速度ベクトルになっているような曲線をいう．

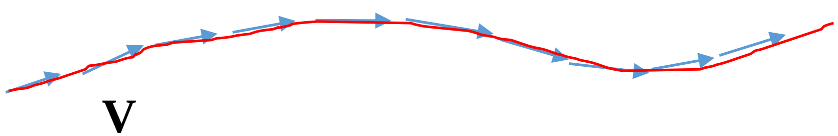
この曲線が$x_i(s)$ と，あるパラメータsで表されるとき

$$v_i(\mathbf{r},\, t) = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \qquad (6) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

で表せる．

s の任意性のため，独立な式は2つ 、t はパラメータとして含まれるだけ．

流線：流体全体に速度ベクトルを描き，そのベクトルを結んだ線．



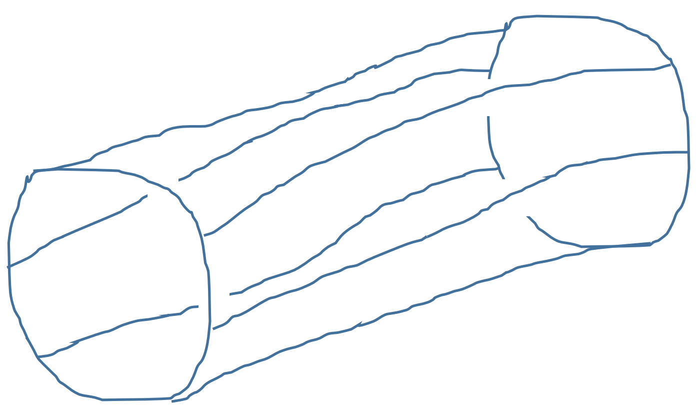
2 流線と流管

流体中に閉曲線を考え，その曲線を通過する流線の集まりを考える
これは管状の面となり，流管と呼ばれている．

流管の断面Sを考え，この面を単位時間当たりに通過する流体の質量を計算すると

$$Q_{\mathrm{m}} = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S \tag{7}$$

である．



2 流線と流管

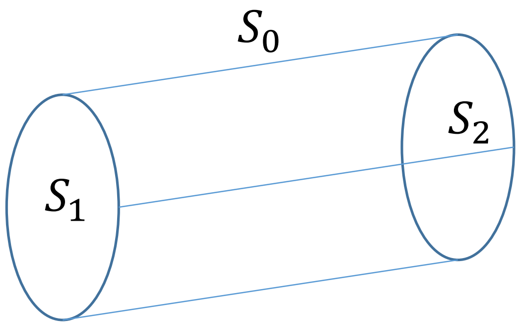
2つの断面S_1，S_2および，流管の側面S_0で囲まれた領域に対して，オイラーの連続の式を用いると，ガウスの定理から

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V = Q_{\mathrm{m}2} - Q_{\mathrm{m}1} + Q_{\mathrm{m}0} \qquad (8)$$

となる（Q_{mi}は面S_iを通過する物質の量）．

流線の定義から，S_0では速度ベクトルは面に平行なので$Q_{m0} = 0$.

もし，定常流なら，左辺も0なので，$Q_{m1} = Q_{m2}$ が成り立つ．つまり，定常流では，流管の内部を流れる流体の質量は一定であることが分かる．



3 渦度と循環

渦度：速度ベクトルの回転

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{v} \tag{10}$$

循環：速度ベクトルをある閉曲線ℓに沿って積分した値

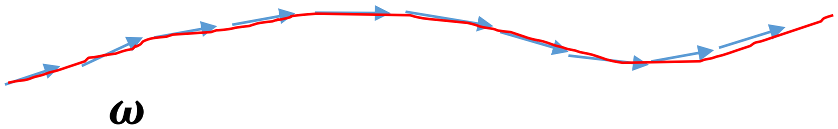
$$\Gamma = \oint_{\ell} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \tag{11}$$

これらの量は流体の回転運動（渦）に関連した量

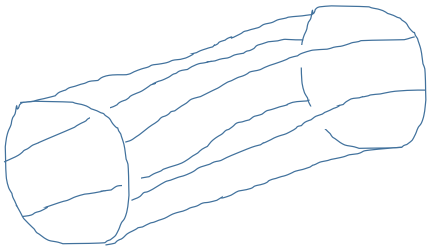
$\boldsymbol{\omega} = 0$ の場合:渦なしの流れ

3.1 渦線と渦管

流線を考えたのと同じように，ある曲線が存在して，その接線が常に渦度ベクトルに比例するような曲線は，渦線と呼ばれる．



流管を考えたのと同じように，流体中に小さな閉曲線を考えその閉曲線を通過する渦線の作る面で囲まれた管状の領域を渦管という．



3.1 渦線と渦管

渦管の断面で渦度ベクトルを面積分すると,

$$\int \omega \cdot \mathrm{n} dS = \int \mathrm{rot\,v} \cdot \mathrm{n} dS = \oint \mathrm{v} \cdot \mathrm{ds} = \Gamma \quad (13)$$

その断面の周囲で定義される曲線にそった循環に等しい.

十分に管が細い場合，断面積を$\boldsymbol{\sigma}$とすると

$$\Gamma = \sigma\omega \qquad (14)$$

となる（$\omega = |\boldsymbol{\omega}|$）． $\mathrm{div}\boldsymbol{\omega} = \mathrm{div\,rot}\mathbf{v} = 0$ から，渦管の表面に経路をとって計算した循環は，どこでも等しい．渦管の強さという.

このΓ を一定に保ったまま$\boldsymbol{\sigma} \to 0$ としたものを渦糸という

4 渦なし流と速度ポテンシャル

流れが渦なしとすると速度ベクトルは

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\Phi \tag{15}$$

あるスカラー関数の勾配で表すことができる．このΦを速度ポテンシャルという．

流れが非定常な場合，速度ポテンシャルは時間の関数となる．

また，非圧縮性を仮定すると

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \Delta\Phi = 0 \tag{16}$$

とラプラス方程式が得られるので，Φは調和関数になる．したがって，適当な境界条件を与えれば，流れは決まってしまう

5 完全流体とオイラー方程式

静止している流体の場合，応力テンソルが$t_{ij} = -p\delta_{ij}$ となる．
流れが存在する場合も，応力テンソルの形が静止時と同じになるような流体を完全流体という．

完全流体の運動方程式は，体積力を$\mathbf{K}$ とすると

$$\rho \frac{\mathrm{Dv}}{\mathrm{D}t} = -\mathrm{grad}\, p + \mathbf{K} \qquad (17)$$

$$\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} = -\delta_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

となる．この方程式をオイラー方程式という．

完全流体は，後述する粘性を無視した理想的なモデルであるが，現実の流体の現象をよく再現できる場合も多く，重要な概念である．

5.1 静止流体とアルキメデスの原理

流体が静止しているとすると，

$$\mathrm{grad}\, p = \mathbf{K} \tag{18}$$

が成り立つ．このことから，体積力が働く時に流体が静止するためには，体積力は保存力でなければならないことがわかる．

代表的な場合として一様な重力を考えよう．このとき，$\mathbf{K} = -\rho g \mathbf{e}_z$である．密度が一定の流体を考えると，

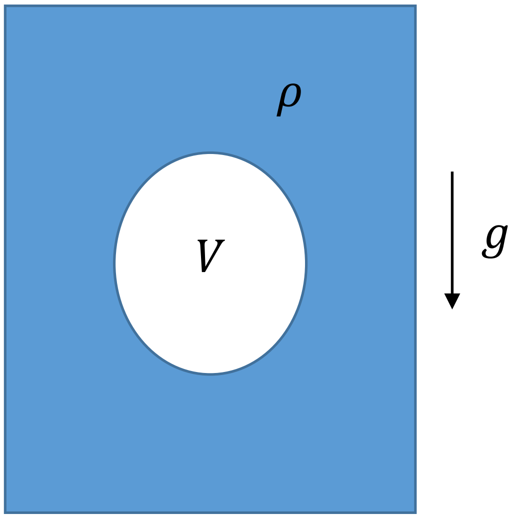
$$p = p_0 - \rho g z \tag{19}$$

このような状態を静水圧平衡という

5.1 静止流体とアルキメデスの原理

この状態で流体中に物体を沈めた時，物体が流体から受ける力は

$$F_i = \int t_{ij} n_j \mathrm{d}S = -\int p n_i \mathrm{d}S \tag{20}$$



である．ここで，ガウスの定理を用いると

$$F_i = -\int p n_i \mathrm{d}S = -\int \frac{\partial p}{\partial x_i} \mathrm{d}V \tag{21}$$
$$= \rho g V \delta_{i3}$$

となる．ここで，Vは物体の体積である．

この関係は，流体が物体に及ぼす力は，物体が排除した流体に働く重力に等しい→アルキメデスの原理.

6 ベルヌーイの定理

完全流体ではエネルギー保存が成り立つ.
オイラー方程式の中の非線形項を取り扱いやすい形に変形する.

$$(\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\,)\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\frac{v^2}{2} - \mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \qquad (23)$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

x成分について計算してみると

$$\begin{aligned} & v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial x} \\ =& v_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + v_z\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \end{aligned} \qquad (24)$$

6 ベルヌーイの定理

オイラー方程式を書き直すと

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\rho \operatorname{grad}\frac{v^2}{2} - \operatorname{grad} p + \rho\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v} + \mathbf{K} \quad (25)$$

また，体積力は,

$$\mathbf{K} = -\rho \operatorname{grad}\Lambda \qquad (26)$$

と密度に比例することを仮定（重力を考えていると思ってよい）．

バロトロピー流体→圧力関数Pが存在する

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2} + P + \Lambda\right) + \mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v} \qquad (27)$$

6.1 定常流に対してのベルヌーイの定理

定常流： $\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$

流線は時間に依存しないパラメータsにより $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$

式(27) に両辺にvを掛けると $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathrm{rot}\mathbf{v}) = 0$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} \mathrm{grad} \left(\frac{v^2}{2} + P + \Lambda \right) = 0 \qquad (28)$$

式(28) は流線にそって,

$$\frac{v^2}{2} + P + \Lambda = C \qquad (29)$$

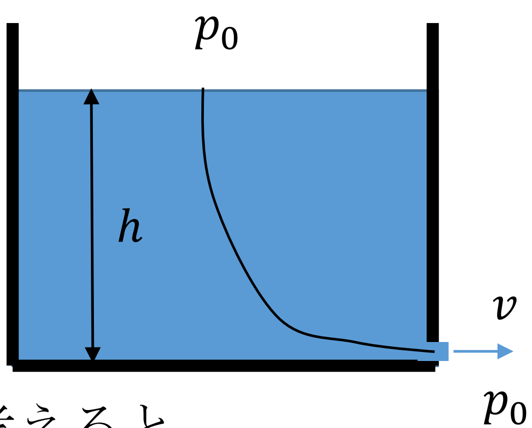
のように一定の量が存在することを示す（Cは流線ごとに異なってもよい）．これをベルヌーイの定理という.

6.1 定常流に対してのベルヌーイの定理

密度一定の流体が重力の下で流れる場合，$P = {}^{p}/_{\rho}$，$\Lambda = gz$

$$\rho\frac{v^2}{2} + p + \rho g z = C \qquad (30)$$

となる．この式もベルヌーイの定理と呼ばれる．



容器にこの流体を深さhになるように入れて，
小さな穴をあけ，穴から流れ出る流体の速さv
を考える．

このとき，流体の上面から穴まで流線に沿って考えると，
流体の上面では$v = 0$，$p = p_0$，$\Lambda = gh$
穴の位置では，圧力は上面と同じ でp_0、$\Lambda = 0$
流れ出す速さは

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (31)$$

となる．これをトリチェリーの定理という．

6.1 定常流に対してのベルヌーイの定理

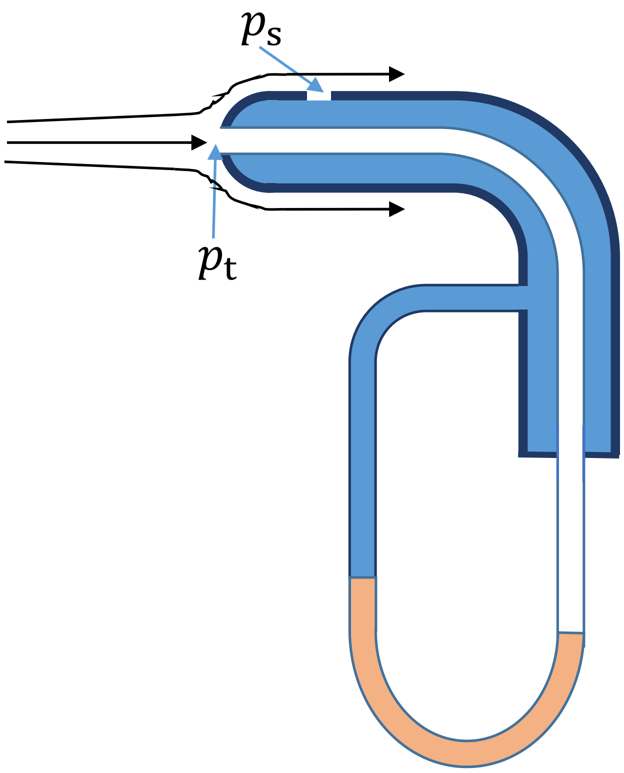
ピトー管：流体中の速度を測定する装置

中心の白い部分の圧力（p_{t}）は流速が0の点（淀み点）での圧力を示す。また、側面の穴を通して測定される青い部分の圧力（p_{s}）は流速に無関係の静圧が測定される。ベルヌーイの定理を用いると

$$p_{\mathrm{t}} = p_{\mathrm{s}} + \rho \frac{v^2}{2}$$

が成り立つ。ここから

$$v = \sqrt{\frac{2(p_{\mathrm{t}} - p_{\mathrm{s}})}{\rho}}$$



6.2 拡張されたベルヌーイの定理

ここでは，渦なしの流れを考える．速度ポテンシャルを用いて$\mathbf{v} = \mathrm{grad}\Phi$と書ける．
このとき，式(27) は

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P + \Lambda\right) = 0 \qquad (32)$$

が成り立つ．すなわち，

$$F(t) = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P + \Lambda \qquad (33)$$

F は時間の関数であってもよいが，空間的には一定の値をとる．

この関係は拡張されたベルヌーイの定理と呼ばれているが，これは速度ポテンシャルから圧力を決める式と考えることもできるので圧力方程式とも呼ばれる．