連続体の力学

第1回

内容

- 連続体の概念
- 応力
- 保存則
- 運動方程式

1 変形体・連続体

通常の物体は，大きさを持ち，運動によって形を変える場合が多い．

固体：外力が無ければ一定の形を保っている．
液体・気体：自分自身が固有の形を持っているわけではなく，容器に入れればその容器を隙間無く満たす．

液体や気体は，極めて小さな力によって大きな変形が生じることを意味しており，流体と呼ばれる．

固体の場合は，外力を加えると変形するが，変形が小さい時は，力を加えるのを止めると変形がなくなり，元に戻る．このような性質を弾性という．

物体が運動により形を変えるという意味で，これらの物体は変形体と呼ばれる．

参考：剛体：全く変形しない．剛体は，変形しないという性質のため，重心の位置とそのまわりの回転の6個の自由度で運動を表すことができるが，変形体ではそのような簡素化はできない．

1.1 連続体の概念

質点の力学では，質量mの質点の位置を$\mathbf{r}$ とし，力$\mathbf{F}$ が働く時，運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F} \qquad (1)$$

複数の質点が集まった質点系ではi番目の質点の質量，位置，働く力をm_i，$\mathbf{r}_i$，$\mathbf{F}_i$ とすると，

$$m_i\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}_i \qquad (2)$$

1.1 連続体の概念

現実の物体は，大きさを持っているのでその運動を議論する場合には，物体を質点の集まりと考え，運動を議論する．

実際の物質は，原子から構成されているので，その原子1個を今考えた質点1個に対応させれば，通常の物体では，アボガドロ数程度の原子が含まれているので，極めて多くの運動方程式を連立して解く必要があることになり，現実的な方法ではない．

そこで，巨視的な平均を用いて，物体を構成するものが連続的に分布していると考えることにする．このような考え方を連続体という．

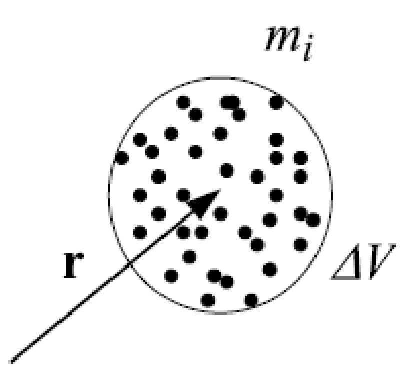
1.1 連続体の概念

例：質量分布を表す密度

ある点r の周りの微小な体積ΔV の領域に含まれる質量Δmに対して

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta \mathcal{V}} m_i \qquad (3)$$

で定義すると，ΔVを適当な大きさにとれば，$\rho(\mathbf{r}, t)$ は場所と時間の連続関数と考えることができる．このように適当な大きさの領域での平均値を考えると，様々な物理量を連続的な量として扱うことが可能になる．



1.1 連続体の概念

物体の変位は元々の物体の各点毎に異なる．

また，先ほど述べた密度以外にも圧力や温度などの物理量も物体の位置と時間の関数となる．

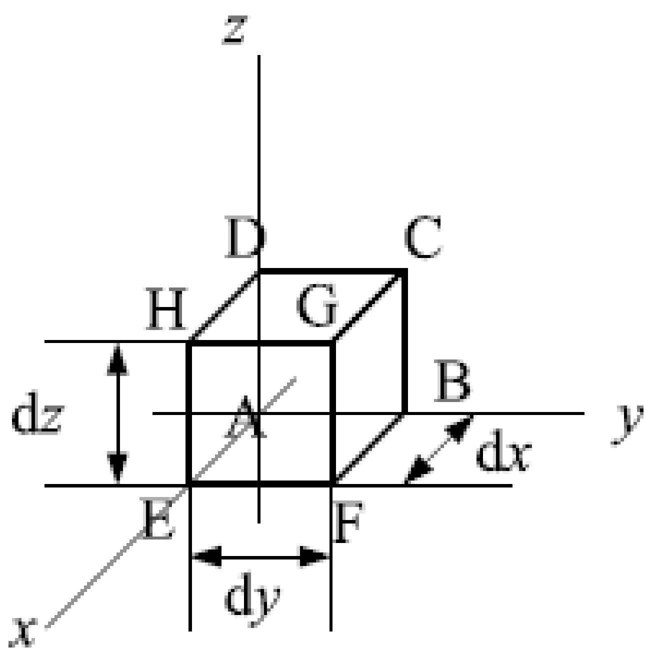
これは，連続体の運動を扱う場合には，場の概念を用いる必要があることを意味している．

圧力	$p(\mathbf{r},t)$
温度	$T(\mathbf{r},t)$
速度ベクトル	$\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$

2 連続体に働く力

連続体に働く力を考える

連続体の1 点$\mathbf{r}=(x,y,z)$と$\mathbf{r}+\mathrm{d}\mathbf{r}=(x+dx,y+dy,z+dz)$で指定される微小直方体ABCDEFGH を考え，この部分に働く力を考える.



力を体積に比例する力（体積力）と境界面を通して働く力（応力）に分けて考える.

2.1 体積力

体積力は，連続体を構成する物質に直接働く力であり，重力や電磁気力のような力が想定されている．

この力が微小直方体に働く場合，直方体の体積$dV = dxdydz$を用いて，

$$\mathrm{dF_V} = \mathbf{K}\mathrm{d}V \tag{4}$$

つまり，Kは単位体積あたりに働く力である．

一様な重力場では，連続体の密度ρと重力加速度ベクトル$\mathbf{g}$ を用いて，

$$\mathbf{K} = \rho\mathbf{g} \tag{5}$$

保存力の場合には，単位質量あたりの位置エネルギーΛ を用いて，

$$\mathbf{K} = -\rho\,\mathrm{grad}\,\Lambda \tag{6}$$

2.2 応力

連続体の場合，連続体を構成する要素の間で働く力を考える必要がある．

この力は，着目している領域の境界を通して働く．先ほどの微小直方体では，6個の面が存在するが，それぞれの面を通して力が働く．

この力は，境界面の面積に比例するので，単位面積当たりに働く力で表したものが応力である．

応力は面の法線に平行な成分（法線と同じ向きの時を正）と直交する（面に平行な）成分の力に分解して考えることができる．

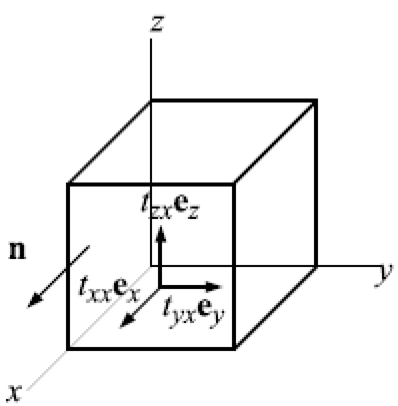
面に垂直な成分：　正の場合は張力、負の場合は圧力

面に平行な成分：　せん断（ずり）変形を引き起こす. せん断応力

2.2 応力

応力は、働く面の向きと力の向きを指定する必要がある。

応力テンソルt_{ij} : j軸に垂直な単位面積に働く力のi 成分
$(i = 1 \rightarrow x, i = 2 \rightarrow y, i = 3 \rightarrow z)$



微小直方体のx軸に垂直な面（EFGH面）を考えると，この面に働く力は,

$$\mathbf{F}'_x = [t_{xx}(x+\mathrm{d}x,\, y,\, z)\mathbf{e}_x + t_{yx}(x+\mathrm{d}x,\, y,\, z)\mathbf{e}_y + t_{zx}(x+\mathrm{d}x,\, y,\, z)\mathbf{e}_z]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{7}$$

ABCD 面を考えると

$$\mathbf{F}_x = -\,[t_{xx}(x,\, y,\, z)\mathbf{e}_x + t_{yx}(x,\, y,\, z)\mathbf{e}_y + t_{zx}(x,\, y,\, z)\mathbf{e}_z]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{8}$$

x軸に垂直な2つの面から受ける力の合計は

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{F}_x &= \mathbf{F}'_x + \mathbf{F}_x \\ &= \left(\frac{\partial t_{xx}}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial t_{yx}}{\partial x}\mathbf{e}_y + \frac{\partial t_{zx}}{\partial x}\mathbf{e}_z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{9}$$

2.2 応力

残りの面についても計算すると

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_y = \left(\frac{\partial t_{xy}}{\partial y} \mathbf{e}_x + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial t_{zy}}{\partial y} \mathbf{e}_z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{10}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_z = \left(\frac{\partial t_{xz}}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} \mathbf{e}_y + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{11}$$

全ての面からの寄与を計算すると

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \sum_{i,\,j=1}^{3} \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \mathrm{d}V \tag{12}$$

応力により，単位体積あたり

$$\tilde{\mathbf{f}} = \sum_{i,\,j=1}^{3} \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \tag{13}$$

の力が働く

2.2 応力

式(13) をある領域Vで積分すると，応力によりその領域に働く力$\mathbf{F}_{\mathrm{stress}}$が得られるが，その$i$成分は

$$(F_{\mathrm{stress}})_i = \int_V \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \mathrm{d}V \qquad (14)$$

ガウスの発散定理を用いると領域を囲む閉曲面 S 上の面積分で計算できる．この面の法線ベクトルを$\mathbf{n}$とすれば

$$(F_{\mathrm{stress}})_i = \int_S \sum_{j=1}^{3} t_{ij} n_j \mathrm{d}S \qquad (15)$$

応力が境界面に働く力であることを表していると共に，法線ベクトル$\mathbf{n}$ で指定される一般の方向を向いた面での単位面積当たりに働く力のi成分は

$$f_i = \sum_{j=1}^{3} t_{ij} n_j \qquad (16)$$

ガウスの定理

あるベクトルの発散 $\mathrm{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$を閉曲面内で積分すると
その表面積分で書くことができる。

$$\int_V \mathrm{div}\mathbf{A}\mathrm{d}V = \int_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S$$

2.3 テンソルの縮約と簡略表示

ベクトルやテンソルの成分の積を作り，ある添え字に対して全ての成分で和を作る操作を縮約という.
和を計算するための添え字はダミー指標と呼ばれる.
式の中に同じ添え字が表れた場合にはその添え字に関しては縮約するという約束をして，和の記号を省略する.

$$\sum_{j=1}^{3} t_{ij} n_j \to t_{ij} n_j \qquad \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \to \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}$$

j:ダミー指標

内積

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i \tag{17}$$

3次元完全反対称テンソル

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ijk = 123,\ 231,\ 312 \\ -1 & ijk = 132,\ 321,\ 213 \\ 0 & \text{others} \end{cases} \tag{18}$$

外積

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \tag{19}$$

2.4 応力のモーメント

応力によるモーメント$\mathbf{N}_{\mathbf{stress}}$ は式(13) を用いると

$$(N_{\text{stress}})_i = \varepsilon_{ijk} \int_{\mathcal{V}} x_j \frac{\partial t_{kl}}{\partial x_l} \mathrm{d}V \qquad (20)$$

$$\frac{\partial (x_j t_{kl})}{\partial x_l} = t_{kj} + x_j \frac{\partial t_{kl}}{\partial x_l} \qquad (21)$$

$$(N_{\text{stress}})_i = \varepsilon_{ijk} \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial (x_j t_{kl})}{\partial x_l} - t_{kj} \right) \mathrm{d}V \qquad (22)$$

被積分関数の第1項は，ガウスの定理で表面積分に変換できて

$$(N_{\text{stress}})_i = \varepsilon_{ijk} \int_{\mathcal{S}} x_j t_{kl} n_l \mathrm{d}S - \varepsilon_{ijk} \int_{\mathcal{V}} t_{kj} \mathrm{d}V \qquad (23)$$

第1項：領域の表面に加わる応力のモーメント
→応力の性質より境界を通して働く力で全てが書き表される必要がある
→第2項は0でなければならない.
これは$\epsilon_{ijk} t_{kj} = 0$ であり，$t_{kj} = t_{jk}$が成り立つ.
応力テンソルは対称テンソルでなければならない

3 連続体の運動

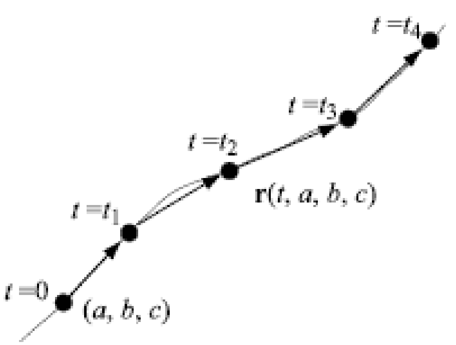
連続体を微小な領域に分けて，それぞれの領域の運動を考える

微小領域を一つの粒子のように考え，構成粒子と呼ぶことにする（流体の場合には流体粒子と呼ばれている）．

構成粒子の位置： $\mathbf{r} = (x, y, z)$ で表すと運動方程式は

$$\rho \mathrm{d}V \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} = \left(K_i + \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \right) \mathrm{d}V \qquad (24)$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} = K_i + \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \qquad (25)$$

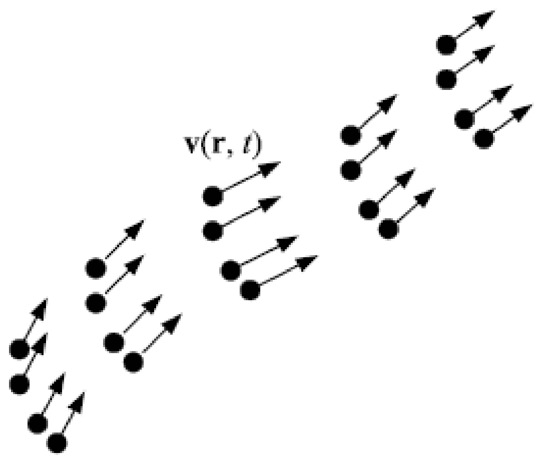


連続体中の構成粒子を区別するためには， $t = 0$ で粒子が存在していた位置$\mathbf{r_0} = (a, b, c)$を用いる．このため，独立変数は，時間tと$\mathbf{r_0}$であり，これらの関数として， $\mathbf{r}(t, \mathbf{r_0})$ を求めることになる．

ラグランジュの方法

3 連続体の運動

もう一つの考え方は，(x, y, z) の関数として，連続体の運動を規定する量，たとえば，速度 $\mathbf{v}$を考えるというやり方である．



この場合，速度は$\mathbf{v}(x, y, z, t)$ のように場所と時間の関数となる．この速度ベクトルは，空間の各点にベクトルが与えられていることを意味していて，電磁気学で表れる電場ベクトルと同様にベクトル場と呼ばれるものになる．

このような描像によって連続体の運動を記述する方法をオイラーの方法という．

オイラーの方法では独立変数は，t と$\mathbf{r} = (x, y, z)$ の空間座標となる．

3.1 オイラー微分とラグランジュ微分

オイラーの方法では独立変数は，tと$\mathbf{r}$ →ある物理量$F(t, \mathbf{r})$の時間変化

通常の偏微分

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{F(t+\delta t, \mathbf{r}) - F(t, \mathbf{r})}{\delta t} \qquad (26)$$

オイラー微分

連続体の運動に沿った時間変化量で考えると

$$\Delta_{\mathrm{L}} F = F(t+\delta t, \mathbf{r}+\mathbf{v}\delta t) - F(t, \mathbf{r}) \qquad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t} &= \lim_{\delta t \to 0} \frac{\Delta_{\mathrm{L}} F}{\delta t} = \frac{\partial F}{\partial t} + v_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathrm{grad}\, F \qquad (28) \end{aligned}$$

ラグランジュ微分

x座標の微分

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0 \qquad (29)$$

$$\frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial x}{\partial t} + v_x \frac{\partial x}{\partial x} + v_y \frac{\partial x}{\partial y} + v_z \frac{\partial x}{\partial z} = v_x \qquad (30)$$

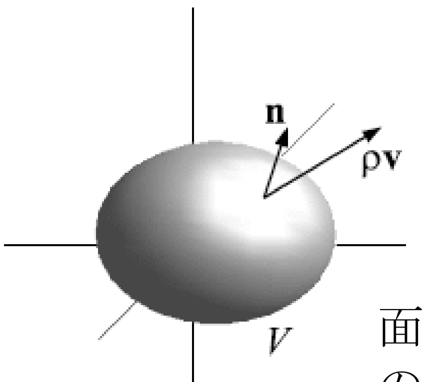
オイラー微分　　　　ラグランジュ微分

4 オイラーの連続の式

連続体の運動では，変形にしたがって連続体を構成する物質が移動するが，今，考えている範囲では質量が保存するはずである．

ある領域に含まれる質量

$$M = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathrm{d}V \quad (\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z) \qquad (36)$$



ある時間間隔δtの間に，この領域に流れ込む質量を境界を表す閉曲面S 上の面積分で表す

面の法線ベクトルを$\mathbf{n}$，微小面積要素を$\mathrm{d}S$ とする．構成粒子の面に向かう速さが$-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$なので，これに$\delta t$を掛けた長さを高さ，$\mathrm{d}S$ を底面に持つ立体の体積に含まれる質量がδtの間に$\mathrm{d}S$を通って流れ込む．

$$\delta M = -\int_S \rho \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S\delta t \qquad (37) \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\int_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S \qquad (38)$$

4 オイラーの連続の式

密度の変化による領域に含まれる質量の変化

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V \qquad (39)$$

質量の保存から

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V &= -\int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S \\ &= -\int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\,(\rho \mathbf{v}) \mathrm{d}V \qquad (40) \end{aligned}$$

ガウスの定理を用いると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \mathbf{v}) = 0 \qquad (41)$$

オイラーの連続の式

5 運動方程式

オイラーの方法による運動方程式を運動量の変化率と働く力が等しいという関係から導く

ある領域内の連続体の持つ運動量$\mathbf{P}$のi成分は

$$P_i = \int_{\mathcal{V}} \rho v_i \mathrm{d}V \qquad (42)$$

この量の変化は，オイラーの方法で考えると
体積力と応力の和が働くことと境界から内部に運動量を持った構成粒子が流入することによって生じる.

力に体積力と応力を考え, 運動量の流入に関しては，法線ベクトルn を持つ微小面積要素$\mathrm{d}S$ をδtの間に通過する構成粒子の持つ運動量は$-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \delta t dS(\rho \mathbf{v})$であるから,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t} = & \int_{\mathcal{V}} \left(K_i + \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \right) \mathrm{d}V \\ & - \int_{\mathcal{S}} \rho v_i v_j n_j \mathrm{d}S\end{aligned} \qquad (43)$$

5 運動方程式

ガウスの定理を用いると

$$\int_{\mathcal{S}} \rho v_i v_j n_j \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} \mathrm{d}V \qquad (44)$$

式(42) の両辺を時間微分すると

$$\frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} \mathrm{d}V \qquad (45)$$

整理すると

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} \mathrm{d}V &= \int_{\mathcal{V}} \left(K_i + \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \right) \mathrm{d}V \\ &\quad - \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} \mathrm{d}V\end{aligned} \qquad (46)$$

任意の領域で成り立つので

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = K_i + \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} \qquad (47)$$

5 運動方程式

ところで、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} \\
&=\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_i\frac{\partial \rho}{\partial t}+v_i\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j}+\rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\
&=\rho\frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t}+v_i\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\rho\mathrm{v}\right)\right) \\
&=\rho\frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t} \qquad (48)
\end{aligned}
$$

運動方程式

$$
\boxed{\rho\frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t}=K_i+\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \qquad (49)}
$$

左辺の加速度に関係する項では，速度のラグランジュ微分で与えられていることから，構成粒子の運動に沿った加速度が運動法則に表れるということであり，ニュートンの法則に従っている．

ラグランジュ微分は，速度に関して非線形な演算である．

この運動方程式を解く場合には，応力テンソルと体積力を与える必要がある．応力テンソルの性質は，考えている連続体の性質に依存するので，固体・液体・気体など個別の問題となる．