『変形体の力学』講義資料 No.3【流体】

1　流体の定義

これまでは，固体の変形・運動を扱ってきた．次に，液体や気体の運動を扱うことにする．液体や気体は，それ自身では形が決まらない．何かの容器に入れれば，その容器を隙間無く満たす．このような性質をもつ連続体を流体という．弾性体と流体の決定的な違いは，構成粒子（流体の場合，流体粒子と呼ばれる）を考えた場合には，小さな力でも粒子の変位が非常に大きくなることである．このため，流体の運動は，流体を構成する物質の運動を粒子的にとらえて記述するラグランジュ方式より，速度場を考えて運動を記述するオイラーの方法がよく用いられる．これらの違いは，既に，最初の章で説明した．このことは，場所と時間の関数として，流体の速度ベクトル $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ を与えることで，流体の運動を記述するということである．全ての場所で $\mathbf{v}=0$ の流体は静止流体，$\mathbf{v}$ が t によらない流れは定常流と呼ばれる．

流体の性質を定式化するとき，大事な性質として，流体が静止しているときには流体の応力テンソルは圧力だけで表されるということをあげておく．すなわち，

$$t_{ij} = -p\delta_{ij} \tag{1}$$

となるのである．この式の意味は，流体中の任意の面で応力を評価すると，必ず面に垂直な成分しか存在せず，いつも圧力となっているということである．もし，せん断応力が存在すると，面に平行な力が存在し，流体がその面に平行に運動することになるからである．また，通常は流体中に張力（負の圧力）が存在することもない．もし，圧力が負になると，面から流体が離れて真空のような部分が発生するはずだが，このようなことも起きない[1]．

このような性質は，流体の性質を定義するものと考えることができる．

1.1　流体の密度と圧力

オイラーの方法で流体を記述する場合には，密度や圧力は場として扱う必要がある．また，これらの量は熱力学的な量であり，状態方程式が成り立つ．通常，状態方程式には，温度 T が含まれ，

$$\rho = f(p, T) \tag{2}$$

である．しかし，実際に流体の運動を議論する場合には，変化の過程を等温変化とか断熱変化のように指定して

$$\rho = f(p) \tag{3}$$

とする．これを流体の状態方程式といい，このように表せる流体をバロトロピー流体という．バロトロピー流体の場合，密度が圧力の関数として与えられるので，圧力関数を

$$P = \int^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho} \tag{4}$$

で定義することで，あとで述べる方程式の取り扱いが楽になる．

密度が一定の流体は，非圧縮性流体と呼ばれる（単に，縮まない流体と呼ばれる）．この性質を満たすと，オイラーの連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{5}$$

から，$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$ という関係が得られる．現実の物質では，必ず密度変化があるので，非圧縮性流体の概念は近似的であるが，運動の条件によっては気体でも縮まないとして扱ってよいことが知られている．

2　流線と流管

流体の流れを考えるとき，流線という概念がよく用いられる．これは，ある曲線の接線ベクトルがその流体の速度ベクトルになっているような曲線をいう．この曲線が $x_i(s)$ と，あるパラメータで表されるとき

$$v_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \tag{6}$$

で表せる．この 3 つの方程式では，s の任意性のため，独立な式は 2 つであり，t はパラメータとして含まれるだけである．この流線は，流体全体に速度ベクトルを描き，そのベクトルを結んだ線となる．

流体中に閉曲線を考え，その曲線を通過する流線の集まりを考えると，これは管状の面となり，流管

[1] ただ，液体の場合，流体粒子間に引力が働く場合もあり，この場合，負の圧力が存在しうることも知られている．

と呼ばれている．流管の断面 $\mathcal{S}$ を考え，この面を単位時間当たりに通過する流体の質量を計算すると

$$Q_{\mathrm{m}} = \int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S \tag{7}$$

であるが，今，2 つの断面 $\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_2$，および，流管の側面 $\mathcal{S}_0$ で囲まれた領域に対して，オイラーの連続の式を用いると，ガウスの定理から

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V = Q_{\mathrm{m}2} - Q_{\mathrm{m}1} + Q_{\mathrm{m}0} \tag{8}$$

となる．ここで，$Q_{\mathrm{m}i}$ は面 $\mathcal{S}_i$ を通過する物質の量である．$Q_{\mathrm{m}1}$ の前の符号が $-$ であるのは，面の法線ベクトルの向きを流体に沿ってとることにしたため，考えている領域に対しては内向きの法線ベクトルとなっているためである．また，流線の定義から，$\mathcal{S}_0$ では，速度ベクトルは面に平行なので $Q_{\mathrm{m}0} = 0$ である．もし，定常流なら，左辺も 0 なので，$Q_{\mathrm{m}1} = Q_{\mathrm{m}2}$ が成り立つ．つまり，定常流では，流管の内部を流れる流体の質量は一定であることが分かる．

2.1　流跡線

流跡線は，

$$v_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \tag{9}$$

となるような曲線である．これは，独立な 3 つの方程式である．ここでは，時間は独立変数として扱われる．この線は一つの流体粒子が運動していくとき描く軌跡を描いた線である．

流線はオイラー的な見方，流跡線はラグランジュ的な見方で流れをとらえて表現する方法である．定常的な流れでは，この 2 つの曲線は一致する．

3　渦度と循環

速度ベクトルの回転は渦度 $\boldsymbol{\omega}$ と呼ばれ，

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\, \mathbf{v} \tag{10}$$

で定義される．また，速度ベクトルをある閉曲線 ℓ に沿って積分した値

$$\Gamma = \oint_{\ell} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \tag{11}$$

は，循環と呼ばれる．これらの量は流体の回転運動（渦）に関連した量である．$\boldsymbol{\omega} = 0$ の場合を渦なしの流れという．

もし，領域が単連結ならば，ストークスの定理を用いて

$$\Gamma = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S \tag{12}$$

と渦度によって表すことができる．しかし，流体中に柱などが存在して単連結で無くなると，渦なしでも循環が存在する場合がある．

3.1　渦線と渦管

流線を考えたのと同じように，ある曲線が存在して，その接線が常に渦度ベクトルに比例するような曲線は，渦線と呼ばれる．また，流管を考えたのと同じように，流体中に小さな閉曲線を考えその閉曲線を通過する渦線の作る面で囲まれた管状の領域を渦管という．渦管の断面で渦度ベクトルを面積分すると，

$$\int \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S = \int \mathrm{rot}\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S = \oint \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \Gamma \tag{13}$$

とその断面の周囲で定義される曲線にそった循環に等しい．十分に管が細い場合，断面積を σ とすると

$$\Gamma = \sigma \omega \tag{14}$$

となる（$\omega = |\boldsymbol{\omega}|$）．$\mathrm{div}\, \boldsymbol{\omega} = \mathrm{div}\, \mathrm{rot}\, \mathbf{v} = 0$ から，渦管の表面に経路をとって計算した循環の値は，どこでも等しい．したがって，渦管を決めると一定である．そこでこれを渦管の強さという．この Γ を一定に保ったまま $\sigma \to 0$ としたものを渦糸という．

4　渦なし流と速度ポテンシャル

もし，流れが渦なしとすると速度ベクトルは

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}\, \Phi \tag{15}$$

のように，あるスカラー関数の勾配で表すことができる．この Φ を速度ポテンシャルという．流れが非定常な場合，速度ポテンシャルは時間の関数となる．また，非圧縮性を仮定すると

$$\mathrm{div}\, \mathbf{v} = \Delta \Phi = 0 \tag{16}$$

とラプラス方程式が得られるので，Φ は調和関数になる．したがって，適当な境界条件を与えれば，流れは決まってしまう．

5　完全流体とオイラー方程式

静止している流体の場合，応力テンソルが $t_{ij} = -p\delta_{ij}$ となることを述べた．流れが存在する場合も，応力テンソルの形が静止時と同じになるような流体を完全流体という．

完全流体の運動方程式は，体積力を $\mathbf{K}$ とすると

$$\rho\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\mathrm{grad}\,p + \mathbf{K} \tag{17}$$

となる．この方程式をオイラー方程式という．

完全流体は，後述する粘性を無視した理想的なモデルであるが，現実の流体の現象をよく再現できる場合も多く，重要な概念である．

5.1　静止流体とアルキメデスの原理

もし，流体が静止しているとすると，

$$\mathrm{grad}\,p = \mathbf{K} \tag{18}$$

が成り立つ．このことから，体積力が働く時に流体が静止するためには，体積力は保存力でなければならないことがわかる．代表的な場合として一様な重力を考えよう．このとき，$\mathbf{K} = -\rho g\mathbf{e}_z$ である．密度が一定の流体を考えると，

$$p = p_0 - \rho g z \tag{19}$$

のように表される．ここで，p_0 は $z = 0$ での圧力である．このような状態を静水圧平衡という．

この状態で流体中に物体を沈めた時，物体が流体から受ける力は

$$F_i = \int t_{ij}n_j\mathrm{d}S = -\int p n_i\mathrm{d}S \tag{20}$$

である．ここで，ガウスの定理を用いると

$$\begin{aligned} F_i &= -\int p n_i\mathrm{d}S = -\int \frac{\partial p}{\partial x_i}\mathrm{d}V \\ &= \rho g V\delta_{i3} \end{aligned} \tag{21}$$

となる．ここで，V は物体の体積で

$$V = \int \mathrm{d}V \tag{22}$$

である．この関係は，流体が物体に及ぼす力は，物体が排除した流体に働く重力に等しいということ示しており，アルキメデスの原理と呼ばれている．

6　ベルヌーイの定理

完全流体ではエネルギー保存が成り立つ．これを議論しよう．そのため，まず，オイラー方程式の中の非線形項を取り扱いやすい形に変形する．これは

$$(\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\,)\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\frac{v^2}{2} - \mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \tag{23}$$

という公式を用いる（$v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2$）．$x$ 成分について計算してみると

$$\begin{aligned} & v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial x} \\ =& v_y(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}) + v_z(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}) \end{aligned} \tag{24}$$

で確かに成り立つ．これを用いてオイラー方程式を書き直すと

$$\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\rho\mathrm{grad}\,\frac{v^2}{2} - \mathrm{grad}\,p + \rho\mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{v} + \mathbf{K} \tag{25}$$

となる．

また，体積力は，

$$\mathbf{K} = -\rho\mathrm{grad}\,\Lambda \tag{26}$$

と密度に比例することを仮定しよう（重力を考えていると思ってよい）．また，流体はバロトロピー流体と考え，圧力関数 P が存在するとすれば，

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\,\left(\frac{v^2}{2} + P + \Lambda\right) + \mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \tag{27}$$

となる．

6.1　定常流に対してのベルヌーイの定理

定常流では，$\partial\mathbf{v}/\partial t = 0$ である．また，流線は時間に依存しないパラメータで $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}s$ と書ける．そこで，式 (27) に両辺に $\mathbf{v}$ を掛けると

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\mathrm{grad}\,\left(\frac{v^2}{2} + P + \Lambda\right) = 0 \tag{28}$$

となる．ここで，$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) = 0$ を用いた．式 (28) は流線にそって，

$$\frac{v^2}{2} + P + \Lambda = C \tag{29}$$

のように一定の量が存在することを示す（C は流線ごとに異なってもよい）．これをベルヌーイの定理という．

密度一定の流体が重力の元で流れる場合，$P = p/\rho$，$\Lambda = gz$ なので，

$$\rho\frac{v^2}{2} + p + \rho g z = C \tag{30}$$

となる．この式もベルヌーイの定理と呼ばれる．

容器にこの流体を深さ h になるように入れて，そこに小さな穴をあけ，穴から流れ出る流体の速さを考える．このとき，流体の上面から穴まで流線に沿って考えると，流体の上面では $v = 0$，$p = p_0$，$\Lambda = gh$ で，穴の位置では，圧力は上面と同じ p_0 であるが，$\Lambda = 0$ なので，流れ出す速さは

$$v = \sqrt{2gh} \tag{31}$$

となる．これをトリチェリーの定理という．

6.2 拡張されたベルヌーイの定理

ここでは，渦なしの流れを考える．このときは，速度ポテンシャルを用いて $\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\Phi$ と書ける．このとき，式 (27) は

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P + \Lambda\right) = 0 \tag{32}$$

が成り立つ．すなわち，

$$F(t) = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P + \Lambda \tag{33}$$

が成り立つ．F は時間の関数であってもよいが，空間的には一定の値をとる．この関係は拡張されたベルヌーイの定理と呼ばれているが，これは速度ポテンシャルから圧力を決める式と考えることもできるので圧力方程式とも呼ばれる．

この式は，渦なしの完全流体に対して成り立つので，式 (28) よりも適用範囲が広いようにも見えるが，式 (28) は定常流であれば渦のある場合でも成り立つという点に注意する必要がある．

7 ポテンシャル流

ここでは，非圧縮性流体の渦なしの流れを扱う．速度ポテンシャルは

$$\Delta\Phi = 0 \tag{34}$$

というラプラス方程式の解であり，調和関数で表される．また，境界条件は，流体と容器や物体の表面で考えることになるが，完全流体の場合，速度の法線成分が 0 であることが条件となる．

7.1 湧き出しと吸い込み

調和関数で一番簡単なものは

$$\Phi = -\frac{k}{r} \tag{35}$$

である（$r = 0$ は特異点であるので除外する）．この速度ポテンシャルから計算される速度ベクトルは

$$\mathbf{v} = \frac{k\mathbf{r}}{r^3} \tag{36}$$

である．これは球対称な流れを表し，$k > 0$ なら中心から外に向かう流れで湧き出しを表し，$k < 0$ は中心に向かう流れで，吸い込みを表す．この場の様子は電磁気学における点電荷の作る電場と同様である．

7.2 二重湧き出し

単純湧き出しと吸い込みが近接して存在する場合で

$$\Phi = -\frac{kd\cos\theta}{r^2} \tag{37}$$

で表される．これは，電気双極子モーメントの作る場と対応がつく．

これらの流れは，静電場に対するラプラス方程式の解を多重極展開するのと同じである．

7.3 一様流に球を入れた場合の流れ

z 方向に一様な流れが存在するときの速度ポテンシャルは

$$\Phi = Uz \tag{38}$$

である．この流れの中に半径 a の球を入れると流れに変化が起きる．この流れは二重湧き出しを追加することで実現できる．すなわち，

$$\Phi = Uz + \frac{A\cos\theta}{r^2} = Ur\cos\theta + \frac{A\cos\theta}{r^2} \tag{39}$$

である．$r = a$ で球面に垂直な速度成分が 0 となるという境界条件をつけると

$$v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = U\cos\theta - 2\frac{A\cos\theta}{r^3} \tag{40}$$

を用いて，

$$A = \frac{Ua^3}{2} \tag{41}$$

で値が決まる．すなわち，

$$\Phi = Ur\cos\theta + \frac{Ua^3}{2r^2}\cos\theta \tag{42}$$

である．この流れは定常流なのでベルヌーイの定理を用いて圧力を計算する，速度の θ 方向の成分は

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -\sin\theta U\left(1+\frac{a^3}{2r^3}\right) \tag{43}$$

であるから，

$$\begin{aligned} v^2 = {v_r}^2 + {v_\theta}^2 = U^2 &\left[\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right)^2\right. \\ &\left. +3\frac{a^3}{r^3}\sin^2\theta\left(1-\frac{a^3}{4r^3}\right)\right] \end{aligned} \tag{44}$$

となる．今，体積力は考えていない．また，$r\to\infty$ で $v^2 \to U^2$，$p \to p_0$ とする．

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}U^2 + \frac{p_0}{\rho} = \frac{1}{2}U^2 &\left[\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right)^2\right. \\ &\left. +3\frac{a^3}{r^3}\sin^2\theta\left(1-\frac{a^3}{4r^3}\right)\right] + \frac{p}{\rho} \end{aligned} \tag{45}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} p = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 &\left[\left(2-\frac{a^3}{r^3}\right)\right. \\ &\left. -3\sin^2\theta\left(1-\frac{a^3}{4r^3}\right)\right]\frac{a^3}{r^3} \end{aligned} \tag{46}$$

である．球が流体から受ける力は z 成分だけ計算すると（残りの成分は対称性から 0 というのがすぐわかる）

$$F_z = -\int_0^\pi p(r=a)\cos\theta 2\pi\sin\theta \mathrm{d}\theta = 0 \tag{47}$$

となり，全く力を受けないことがわかる．これは，渦なしの完全流体中の物体は力を受けないというダランベールのパラドックスと呼ばれているものの一例である．

7.4 静止流体中を運動する球の回りの流れ

次に，静止している流体中を半径 a の球が z 方向に速度 U で運動する場合を考えよう．このときは，十分遠方では $\mathbf{v}=0$ であるので，式 (42) を求めた時の手続きを参考にして，

$$\Phi = \frac{A}{r^2}\cos\theta \tag{48}$$

と仮定してみる．境界条件は，球が速度 U で運動しているので，その法線方向の速度は $U\cos\theta$ であることを考えて，$A = -Ua^3/2$ である．これを代入すると，

$$\Phi = -\frac{Ua^3}{2r^2}\cos\theta \tag{49}$$

となる．ちょうど，これは，式 (42) の流れを z 方向に U で運動する座標系で眺めた時の解に等価である．ただし，この場合，球は $-U$ で運動しているので，符号が反対であることに注意する．

7.4.1 誘導質量

式 (49) で表される流体の持つ運動エネルギーを考えよう．一般的に運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}\int \rho v^2 \mathrm{d}V \tag{50}$$

である．また，ポテンシャルを用いると

$$K = \frac{1}{2}\int \rho(\mathrm{grad}\,\Phi)^2\mathrm{d}V \tag{51}$$

であるが，

$$\begin{aligned} (\mathrm{grad}\,\Phi)^2 &= \mathrm{div}\,(\Phi\mathrm{grad}\,\Phi) - \Phi\Delta\Phi \\ &= \mathrm{div}\,(\Phi\mathrm{grad}\,\Phi) \end{aligned} \tag{52}$$

であるので，

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\int \rho\mathrm{div}\,(\Phi\mathrm{grad}\,\Phi)\mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{2}\int \rho\Phi\mathrm{grad}\,\Phi\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{53}$$

と境界の値で表すことができる，

流体中を運動する球の場合，十分遠方では Φ も $\mathrm{grad}\,\Phi$ も 0，なので，球の表面だけで計算すると

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\rho\int_0^\pi 2\pi a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta U^2 a\cos^2\theta/2 \\ &= \frac{1}{2}\rho\frac{2\pi}{3}a^3U^2 \end{aligned} \tag{54}$$

これは，流体中の球の運動に付随した運動エネルギーである．したがって，球の質量が

$$M_{\mathrm{induced}} = \frac{2\pi}{3}a^3\rho \tag{55}$$

だけ，増えたように振る舞う．実際，球が加速度運動する場合には，球の速度変化に応じて，流体の速度も瞬時に変化する（速度を決めるラプラス方程式には時間はパラメータとして含まれるだけであるの

で，変化は瞬時に伝わる）．これは，流体に対して非圧縮性を仮定したためである．このように流体中を物体が運動するときは，流体の慣性の影響で質量が増加して見える．この増加分 M_{induced} を誘導質量または仮想質量という．誘導質量は物体の形状に依存している．

8　2 次元流

ここでは，2 次元流を扱う．すなわち，$v_z = 0$ で，$\mathbf{v}$ が x と y だけの関数である．さらに，非圧縮性を仮定すると，

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{56}$$

が成り立つ．

8.1　流れの関数

2 つの点を結ぶある線（実際には z 方向には一様な単位長さの深さを持つ面）を通過する流量は，

$$Q = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}s \tag{57}$$

で表される．ここで，$\mathbf{n}$ は点 A と B を結ぶ曲線の法線ベクトルであり，

$$\mathbf{n}\mathrm{d}s = (\mathrm{d}y,\, -\mathrm{d}x) \tag{58}$$

と表せる．ここで，A と B を結ぶ 2 つの経路を考え閉曲線を作ると，グリーンの定理から

$$\oint (v_x \mathrm{d}y - v_y \mathrm{d}x) = \int (\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{59}$$

であり，非圧縮性流体では必ず 0 となる．したがって，Q は積分する経路によらず端の点だけで決まる．このことは，ある関数 $\Psi(x,\, y)$ が存在し，

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y},\ \ v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{60}$$

と書けることを意味する．この Ψ を流れの関数という．この流れに対して，渦度を計算すると，x と y 成分は 0 で，

$$\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\Delta \Psi \tag{61}$$

が成り立つ．

渦なしの場合には，$\omega_z = 0$ なので，Ψ は調和関数である．また，$\Psi(x,\, y) = C$ の条件を満たす場合は曲線を表すが，曲線の接線を考えると，

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\mathrm{d}y = -v_y \mathrm{d}x + v_x \mathrm{d}y = 0 \tag{62}$$

から，接線が速度ベクトルに平行であることがわかる．すなわち，この曲線は流線を与える．

8.2　渦なしの流れと複素速度ポテンシャル

渦なしを仮定すると，速度ポテンシャル $\Phi(x,\, y)$ に対して，

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x},\ \ v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{63}$$

が成り立ち，非圧縮性ならば $\Delta\Phi = 0$ を満たす．ところで，Φ も Ψ もその偏微分が速度ベクトルを与えるので，

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y},\ \ v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{64}$$

という関係がある．この関係は，解析関数におけるコーシー・リーマンの関係をあらわすので，$\zeta = x + \mathrm{i}y$ とすると

$$f(\zeta) = \Phi(x,\, y) + \mathrm{i}\Psi(x,\, y) \tag{65}$$

は，ζ の解析関数となる．この $f(\zeta)$ は複素速度ポテンシャルと呼ばれ，2 次元の非圧縮性ポテンシャル流を決定する．すなわち，適当な解析関数を見つけることで，流れを表すことができる．いま，この微分を考えると

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v_x - \mathrm{i}v_y = v \exp(-\mathrm{i}\theta) \tag{66}$$

が成り立つ．ここで，$v_x = v\cos\theta$，$v_y = v\sin\theta$ である．

8.3　複素速度ポテンシャルの例

8.3.1　一様流

$$f(\zeta) = U\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\zeta \tag{67}$$

とすれば，

$$\frac{\mathrm{d}f(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta} = U\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \tag{68}$$

より，x 軸と角 α をなす一様な流れを表す．

8.3.2 湧き出しと循環

$$f(\zeta)=\frac{q}{2\pi}\log\zeta \tag{69}$$

とすれば,

$$\frac{\mathrm{d}f(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}=\frac{q}{2\pi\zeta} \tag{70}$$

となる．このとき，流れの関数は，$\zeta=|\zeta|\exp(\mathrm{i}\theta)$ とすれば,

$$\Psi=\frac{q\theta}{2\pi} \tag{71}$$

であり，流線は原点から放射状に伸びる直線となる．このため,

$$\oint\mathrm{d}\Psi=q \tag{72}$$

となり，原点から流れが湧き出していることを示す．この複素速度ポテンシャルは原点に特異点があるので流れの関数が多価関数になる．この領域に複数の湧きだしが存在すれば

$$\oint\mathrm{d}\Psi=\sum q_i=Q_\mathrm{c} \tag{73}$$

と各湧き出しの総和が得られる．

$$f(\zeta)=-\mathrm{i}\frac{\Gamma}{2\pi}\log\zeta \tag{74}$$

とすれば,

$$\frac{\mathrm{d}f(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}=-\mathrm{i}\frac{\Gamma}{2\pi\zeta} \tag{75}$$

となる．このとき，速度ポテンシャルは,

$$\Phi=\frac{\Gamma\theta}{2\pi} \tag{76}$$

でやはり多価関数になり，循環

$$\oint\mathrm{d}\Phi=\Gamma \tag{77}$$

が存在する．複数の循環が存在すれば

$$\oint\mathrm{d}\Phi=\sum\Gamma_i=\Gamma_\mathrm{c} \tag{78}$$

と総和が得られる．

一般に，ある領域で閉曲線を考えた場合にその一周での変化は

$$\oint\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta=\oint\mathrm{d}\Phi+\mathrm{i}\oint\mathrm{d}\Psi=\Gamma_\mathrm{c}+\mathrm{i}Q_\mathrm{c} \tag{79}$$

となる．もちろん，f が正則なら，この積分は 0 となる．

8.4 円柱の回りの流れ

3 次元で球の回りの流れを扱ったが，2 次元では円柱の回りの流れがこれに相当する．ただ，大きな違いは，円柱の存在によって流れの存在する領域が単連結ではなくなる点である．そのため，渦なしの流れでも円柱を囲む曲線に沿っての循環が存在しうる．

8.4.1 一様な流れの中の円柱

一様な流れが x 方向に存在するとしよう．このとき，円柱が存在しなければ $f(\zeta)=U\zeta$ であるが，円柱の存在により，新たな流れが生じる．これは

$$f(\zeta)=U\zeta+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\zeta^n}+c_0\log\zeta \tag{80}$$

と級数展開できる．ここで，負のべきだけを考えたのは円柱の影響は無限遠では消えるという条件を考えたからである．また，対数の項は循環の存在を取り入れるためである（いま湧き出しはないので c_0 は純虚数となる）．境界条件は，$|\zeta|=a$ で $v_n=v_x\cos\theta+v_y\sin\theta=0$ である．これを計算すると

$$\begin{aligned}v_n&=\mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\zeta}{|\zeta|}\right]\\&=U\cos\theta-\mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nc_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}{|\zeta|^{n+1}}\right]\end{aligned} \tag{81}$$

である．この式はフーリエ級数の形をしているので $|\zeta|=a$ を代入して $v_n=0$ が成り立つためには,

$$c_1=Ua^2 \tag{82}$$

で他は 0 が条件となる．しかし，この条件からは c_0 の値は決まらない．これは領域が単連結で無いために生じる．循環の定義から $c_0=-\mathrm{i}\Gamma/(2\pi)$ であり，これは条件として与える必要がある．後で述べるように，完全流体では循環は保存されるので初期条件の値を保持する．

この流れの圧力を計算する．$|\zeta|\to\infty$ で $v\to U$ である．ベルヌーイの定理から

$$p=p_0+\frac{1}{2}\rho(U^2-v^2) \tag{83}$$

であるが，円柱表面では速度は接線成分 v_θ しかない．

$$v_\theta=\frac{1}{|\zeta|}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=-2U\sin\theta+\frac{\Gamma}{2\pi a} \tag{84}$$

したがって，

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho\left[2U\sin\theta - \Gamma/(2\pi a)\right]^2 \quad (85)$$

である．この圧力を積分すると円柱に働く力 $\mathbf{F}$ が求まる．流れに平行な成分は

$$F_x = -a\int_0^{2\pi} p\cos\theta \mathrm{d}\theta = 0 \quad (86)$$

と 0 であり，球に働く力と同様に流体から力をうけないというダランベールのパラドックスが成り立つ．垂直な方向は，

$$F_y = -a\int_0^{2\pi} p\sin\theta \mathrm{d}\theta = -\rho U\Gamma \quad (87)$$

となり，循環が存在すると力が働く．これは揚力と呼ばれる力で，循環に働く揚力が $\rho\Gamma U$ で与えられるというクッタ・ジューコフスキーの定理が成り立つ．揚力の生じる理由は，循環を持つ流れは，円柱の表面に沿った流れで，一様な流れで生じる対称な流れと重ね合わせると，y 軸の正と負により流速が異なるようになる．この流速の差が圧力差となり，揚力が発生する．今与えた条件では，$\Gamma > 0$ は左回りの流れを表す．したがって，$y > 0$ の方が流速が遅く，ベルヌーイの定理から圧力が高くなる．そのため，y 軸で負の向きに力を受ける．

8.5 等角写像とその応用

今，別の複素数 ξ により

$$\zeta = g(\xi) \quad (88)$$

と表される場合を考える．ここで，g は ξ の解析関数である．これは ξ の複素平面から ζ の複素平面への写像と考えることができる．また，この写像では，角度が保存されるので等角写像と呼ばれる[2]．

8.5.1 等角写像の例

$$\zeta = A\xi^2 \quad (89)$$

で表される変換を考える．$\xi = x' + \mathrm{i}y'$ と表すと，ζ 平面で $y = 0$ を表す直線（x 軸）が，$x > 0$ の領域が，$y' = 0$ かつ $x' > 0$ の部分，$x < 0$ の部分が，$x' = 0$ かつ $y' > 0$ の部分に写像される．このことは，ζ 平面での $y = 0$ をまっすぐな壁が存在していると考えると，ξ 平面では直角に曲がった壁になることを意味する．もし，ζ 平面では，壁に沿った一様な流れが存在すれば，ζ 平面で $f(\zeta) = U\zeta$ と表される．このとき，ξ 平面では

$$f(\xi) = UA\xi^2 \quad (90)$$

であり，速度ポテンシャルと流れの関数を求めれば

$$\Phi = UA(x'^2 - y'^2),\ \ \Psi = 2UAx'y' \quad (91)$$

となる．Ψ が一定の曲線は流線を表すが，この場合，直交双曲線を表す．このことから，この流れは，確かに直角に曲がった壁に沿った流れを表すと考えられる．一般に，

$$f(\xi) = A\xi^n \quad (92)$$

で表される流れは，角度 π/n に曲がった壁に沿った流れを表す．

8.5.2 クッタ・ジューコフスキー変換

クッタ・ジューコフスキー変換は

$$\zeta = \xi + \frac{a^2}{\xi} \quad (93)$$

で表される．ξ 平面で半径 a の円が存在するとき，$\xi = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ であるから，

$$\zeta = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \frac{a^2}{a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = 2a\cos\theta \quad (94)$$

と，ζ 平面では長さ $4a$ の線分を表す．すなわち，円を線分に写像する．このとき，ζ 平面では，x 軸に平行な一様な流れが存在するとき，$f(\zeta) = U\zeta$ であるが，これを，ξ 面で考えると

$$f(\xi) = U\left(\xi + \frac{a^2}{\xi}\right) \quad (95)$$

と確かに半径 a の円柱の回りの流れを表している．

では，ξ 面で x' 軸と角度 α をなす流れについて考えると $\|\xi\| \to \infty$ で，$f \to U\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$ となり，$|\xi| = a$ では，速度の法線成分が 0 となる解を見つけると

$$f(\xi) = U\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\xi + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\frac{a^2}{\xi}\right) + \mathrm{i}\frac{\Gamma}{2\pi}\log\xi \quad (96)$$

[2] ξ 平面で P:ξ と Q:$\xi+\delta\xi$，Q':$\xi+\delta\xi'$ の近接した 3 点は，ζ 平面では R:$g(\xi)$ と S:$g(\xi+\delta\xi) = g(\xi)+\mathrm{d}g$，S':$g(\xi)+\mathrm{d}g'$ に写像される．このとき，$|\delta\xi'| = |\delta\xi|$ となるように決めておくと PQ と PQ' のなす角 ϕ は $\delta\xi'/\delta\xi = \exp\mathrm{i}\phi$ で求めることができる．そこで，$\delta g'/\delta g$ を計算する．ところで，$g(\xi+\delta\xi) = g(\xi)+\delta g$ より，$\delta g = (\mathrm{d}g/\mathrm{d}\xi)\delta\xi$ だから，$\delta g'/\delta g = \delta\xi'/\delta\xi = \exp\mathrm{i}\phi$ となるので RS と RS' のなす角は等しい．

である．ここでは，循環を持つ解を考えた（この式では $\Gamma > 0$ の時，時計回りの循環を示す）．さらに $|\xi| \to \infty$ では，$\zeta \sim \xi$ である．このことから，式 (96) で表される流れは，ζ 面では，x 軸と角度 α をなす一様な流れが，長さ $4a$ の平板を x 軸に平行に置いた時の流れを表すと考えられる．この ζ 面での速度を求めると

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\zeta} \tag{97}$$

となる．さらに，

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} = U\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\frac{a^2}{\xi^2}\right) + \mathrm{i}\frac{\Gamma}{2\pi\xi} \tag{98}$$

かつ

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\zeta} = \left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\xi}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{a^2}{\xi^2}\right)^{-1} \tag{99}$$

である．ここで，$\xi = \pm a$ で $\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}\zeta$ が発散してしまうことがわかる．そこで，$\xi = a$ のところ（$\zeta = 2a$ であり，板の後端）では，$\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi = 0$ となるように条件をつける（板の後端では速度が発散しない）．このときには

$$\Gamma = 4\pi a U \sin\alpha \tag{100}$$

を満たす必要がある．この条件を満たすように循環が決まるということは，クッタの条件とジューコフスキーの仮定と呼ばれている．

8.6 ブラジウスの公式

2 次元の流れの中の物体に働く力は，物体の表面を表す曲線に沿っての積分，

$$F_x = -\oint p n_x \mathrm{d}s = -\oint p\mathrm{d}y \tag{101}$$

$$F_y = -\oint p n_y \mathrm{d}s = \oint p\mathrm{d}x \tag{102}$$

で表される．ここから，

$$\begin{aligned} F_x - \mathrm{i}F_y &= -\mathrm{i}\oint p(\mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y) \\ &= -\mathrm{i}\oint p\mathrm{d}\zeta^* \end{aligned} \tag{103}$$

となる．ここで，$\zeta^* = x - \mathrm{i}y$ は ζ の複素共役を表す．また，複素速度ポテンシャルを用いると，圧力は

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{1}{2}\rho {U_0}^2 - \frac{\rho}{2}v^2 \\ &= p_0 + \frac{1}{2}\rho {U_0}^2 - \frac{\rho}{2}\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\right|^2 \end{aligned} \tag{104}$$

で表される（p_0 と U_0 は無限遠での圧力と速さ）．$p_0 + \rho {U_0}^2/2$ は定数なので，

$$\oint (p_0 + \rho {U_0}^2/2)\mathrm{d}\zeta^* = 0 \tag{105}$$

であるから，

$$F_x - \mathrm{i}F_y = \mathrm{i}\oint \frac{\rho}{2}\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\right|^2 \mathrm{d}\zeta^* \tag{106}$$

である．さらに

$$\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\right|^2 \mathrm{d}\zeta^* = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\mathrm{d}f^*}{\mathrm{d}\zeta^*}\mathrm{d}\zeta^* = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}f^* \tag{107}$$

である．ところで，物体の表面は流線となるから，$\mathrm{d}\Psi = 0$ である．したがって，$\mathrm{d}f^* = \mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}f$ である．よって，

$$\oint \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\right|^2 \mathrm{d}\zeta^* = \oint \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2 \mathrm{d}\zeta \tag{108}$$

が成り立つ．これを用いると

$$F_x - \mathrm{i}F_y = \mathrm{i}\frac{\rho}{2}\oint \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2 \mathrm{d}\zeta \tag{109}$$

となる．ところで，$(\mathrm{d}f/\mathrm{d}\zeta)^2$ は ζ の解析関数なので，特異点の存在しない領域では，自由に積分路を変更できる．したがって，曲線は物体を囲む任意の閉曲線で積分すればよい（物体と曲線で囲まれた領域に特異点が存在しないという条件のもとで）．この公式をブラジウスの第一公式という．

力のモーメントでは z 成分（流れの面に垂直な方向）が存在し，

$$\begin{aligned} M_z &= \oint p(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) \\ &= -\frac{\rho}{2}\oint v^2(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) \end{aligned} \tag{110}$$

である．ここで

$$\begin{aligned} \zeta\mathrm{d}\zeta^* &= (x + \mathrm{i}y)(\mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y) \\ &= x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + \mathrm{i}(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y) \end{aligned} \tag{111}$$

なので，

$$v^2(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) = \mathrm{Re}[v^2\zeta\mathrm{d}\zeta^*] = \mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\zeta\mathrm{d}f^*\right] \tag{112}$$

であるから，

$$M_z = -\frac{\rho}{2}\mathrm{Re}\left[\oint \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2 \zeta\mathrm{d}\zeta\right] \tag{113}$$

と変形できる．ここで，積分路は式 (109) と同様に変形が可能である．この公式はブラジウスの第二公式と呼ばれている．

9 波動

ここでは，非圧縮性の完全流体の渦なしの流れにおける波動を扱う．速度ポテンシャル Φ は，深さ z と水平方向 x のみの関数と考えよう（y 方向には一様とする）．解くべき方程式はラプラス方程式

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \tag{114}$$

である．また，流体の深さ h は波の無いときを基準として，$z=0$ とし，$z=-h(x)$ で与えるものとする．この点で，速度の法線成分は 0 である．流体の表面は $z=\eta(x,t)$ で与えられるものとし，これが波の形を与える．この条件は，常に成り立つので

$$\frac{\mathrm{D}(z-\eta)}{\mathrm{D}t}=v_z-\frac{\mathrm{D}\eta}{\mathrm{D}t}=v_z-\frac{\partial\eta}{\partial t}-v_x\frac{\partial\eta}{\partial x}=0 \tag{115}$$

をみたす．これは，運動学的境界条件と呼ばれている．さらに圧力方程式から

$$p=-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{\rho}{2}|\mathrm{grad}\,\Phi|^2-\rho gz+F(t) \tag{116}$$

であるが，$z=\eta$ では，圧力は気圧 p_0 と等しいので $F(t)=p_0$ とすれば $z=\eta$ にて，

$$\eta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{1}{2g}|\mathrm{grad}\,\Phi|^2 \tag{117}$$

である．これらの式は非線形の条件を与えているため，厳密な解を得ることは難しい．

9.1 線形近似

波の振幅が十分小さく，速度が遅いときは線形近似が成り立つ．式 (115) は

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial\eta}{\partial t} \tag{118}$$

で，式 (117) は

$$\eta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{119}$$

となる．ここから η を消去すると

$$g\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0 \tag{120}$$

となる．また，本来これらの条件は $z=\eta$ で与えるべきものであるが，微小振幅の場合，$z=0$ で与えてよい．

h が一定の場合を考えよう．この方程式の解の形を

$$\Phi=f(z)\cos(\omega t-kx) \tag{121}$$

と仮定すると，ラプラス方程式から

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}-k^2 f=0 \tag{122}$$

が得られる．解は

$$f=A\mathrm{e}^{kz}+B\mathrm{e}^{-kz} \tag{123}$$

である．

境界条件を与えると，$z=-h$ で $v_z=0$

$$k(A\mathrm{e}^{-kh}-B\mathrm{e}^{kh})=0 \tag{124}$$

$z=0$ で，

$$gk(A-B)-\omega^2(A+B)=0 \tag{125}$$

が得られる．この 2 つの方程式から，$A=B=0$ 以外の解が存在するためには

$$\omega^2=gk\frac{1-\mathrm{e}^{-2kh}}{1+\mathrm{e}^{-2kh}}=gk\tanh kh \tag{126}$$

でなければならない．これが分散関係を与える．また，速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned}\Phi&=A\mathrm{e}^{-kh}[\mathrm{e}^{k(z+h)}+\mathrm{e}^{-k(z+h)}]\cos(\omega t-kx)\\&=C\cosh k(z+h)\cos(\omega t-kx)\end{aligned} \tag{127}$$

で与えられる．したがって，水面の変位は

$$\begin{aligned}\eta&=-\frac{1}{g}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\\&=\frac{C\omega}{g}\cosh kh\sin(\omega t-kx)\end{aligned} \tag{128}$$

となる．この波は，通常の進行波を表し，振幅は $\eta_0=C\omega\cosh kh/g$ である．

9.1.1 長い波・浅い波

波の波長が，深さに比べて十分長い場合，すなわち，$kh\ll 1$ の場合，分散関係は

$$\omega=k\sqrt{gh} \tag{129}$$

であるから，波の速度は一定で

$$c=\frac{\omega}{k}=\sqrt{gh} \tag{130}$$

で与えられる．さらに，

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = Ck\cosh k(z+h)\sin(\omega t - kx) \quad (131)$$

$$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = Ck\sinh k(z+h)\cos(\omega t - kx) \quad (132)$$

であるが，$|z| < h$ なので，$|\sinh k(z+h)| \ll 1$，$\cosh k(z+h) \sim 1$ より，

$$\begin{aligned} v_x &= Ck\sin(\omega t - kx) \\ &= \eta_0(g/c)\sin(\omega t - kx) \end{aligned} \quad (133)$$

$$v_z = 0 \quad (134)$$

と考えてよい．すなわち，流体の動きは水平方向で，深さにはほとんど依存しないという性質が得られる．このような波を長波または浅水波といい，この近似を長波近似または浅水波近似と呼ぶ．

9.1.2　短い波・深い波

逆の場合を考えよう．$kh \gg 1$ の場合には，$\tanh kh \sim 1$ であるから，分散関係は

$$\omega = \sqrt{kg} \quad (135)$$

となり，波の速度は

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (136)$$

で与えられる．したがって，波長が短くなるにしたがって，速度は遅くなる．また，$\sinh k(z+h) \sim \cosh k(z+h) \sim \mathrm{e}^{k(z+h)}/2$ なので，

$$\begin{aligned} v_x &= Ck\mathrm{e}^{k(z+h)}\sin(\omega t - kx)/2 \\ &= \eta_0\omega\mathrm{e}^{kz}\sin(\omega t - kx) \end{aligned} \quad (137)$$

$$\begin{aligned} v_z &= Ck\mathrm{e}^{k(z+h)}\cos(\omega t - kx)/2 \\ &= \eta_0\omega\mathrm{e}^{kz}\cos(\omega t - kx) \end{aligned} \quad (138)$$

であり，流体の流れは，円を描くような速度ベクトルが生じる．また，深さ方向には急速に小さくなり，表面から波長程度の部分に波が存在すること表している．

10　渦定理

完全流体に対しては，渦に関してのいくつかの定理が知られている．

10.1　ケルビンの循環定理

完全流体に関して，循環のラグランジュ微分を考える．すなわち，

$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\oint \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}\right) \quad (139)$$

である．ここで，微分がラグランジュ微分なので，循環の計算を行う経路が流体の流れに沿って変化する部分も考える必要があるので，

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\oint \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s}\right) = \oint \frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} + \oint \mathbf{v}\cdot\frac{\mathrm{D}\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{D}t} \quad (140)$$

である．さらに，

$$\frac{\mathrm{D}\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{D}t} = \mathrm{d}\frac{\mathrm{D}\mathbf{s}}{\mathrm{D}t} = \mathrm{d}\mathbf{v} \quad (141)$$

と，式 (17) のオイラー方程式に，圧力関数と体積力に対するポテンシャルを用いると

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\mathrm{grad}\,(P+\Lambda) \quad (142)$$

が得られ，これらを式 (140) に代入すると，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}\Gamma}{\mathrm{D}t} &= -\oint \mathrm{grad}\,(P+\Lambda)\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} + \oint \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{v} \\ &= -\oint \mathrm{d}(P+\Lambda) + \oint \mathrm{d}(v^2/2) = 0 \end{aligned} \quad (143)$$

である．ここでは，これらの物理量（P，Λ，v^2）は，空間の一価関数であるから，この周回積分は 0 となることを用いた．結局，循環の値は時間的に一定となる．すなわち，完全流体が式 (142) を満たす場合，循環は保存量となる．これをケルビンの循環定理という．

10.2　渦度方程式

循環は保存量であることが分かったが，渦度ベクトル自身の時間変化はどうであろうか．ここでは，渦度ベクトルのラグランジュ微分を考えることにしよう．ラグランジュ微分の定義から

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\,)\boldsymbol{\omega} \quad (144)$$

である．ところで，式 (27) の両辺の回転をとると $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, = 0$ を用いて

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}) \quad (145)$$

が得られる．さらに，直交座標で計算する場合に成り立つ公式

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{A}\mathrm{div}\,\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathrm{div}\,\mathbf{A} \\
&\quad -(\mathbf{A}\cdot\mathrm{grad}\,)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\mathrm{grad}\,)\mathbf{A}
\end{aligned}
\tag{146}
$$

を利用すると，

$$
\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{D}t}=(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,)\mathbf{v}-\boldsymbol{\omega}\mathrm{div}\,\mathbf{v} \tag{147}
$$

が得られる（$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\omega}=\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}=0$ を用いた）．さらに，オイラーの連続の式

$$
\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})=\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0 \tag{148}
$$

を用いると．

$$
\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{D}t}-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{\omega}=\rho\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)=(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,)\mathbf{v} \tag{149}
$$

が成り立つ．これは渦度ベクトルの時間変化を決める方程式で渦度方程式と呼ばれている．

10.3　ラグランジュの渦定理

式 (149) は時間に関して 1 階の微分方程式である．もし，はじめ $\boldsymbol{\omega}=0$ だった場合は，この解はそのまま $\boldsymbol{\omega}=0$ を保つ．これは，渦が勝手に生成されることはないことを示す．また，最初，$\boldsymbol{\omega}\neq 0$ であれば，$\boldsymbol{\omega}=0$ となることはなく，そのままの $\boldsymbol{\omega}\neq 0$ を保ち消滅することはない．これは，完全流体にたいして渦のあるなしが絶対的な意味を持つことを示しており，ラグランジュの渦定理とか渦の不生不滅定理とか呼ばれている．

10.4　ヘルムホルツの渦定理

ヘルムホルツは，完全流体中の渦の運動に関して，

1. 渦線を構成する流体粒子は，時間が経過しても同じ渦線を構成する．
2. 渦管の強さは時間が経過しても，変化しない．

ことを示した．これをヘルムホルツの渦定理という．

渦線の運動に関しては，任意の曲線の線素ベクトルの運動を考えることから出発する．時刻 t に $\mathbf{r}$ という点にいた流体粒子と $\mathbf{r}+\delta\mathbf{s}$ という点にいた粒子の位置は，時刻 $t+\delta t$ には，$\mathbf{r}+\mathbf{v}(\mathbf{r})\delta t$ と $\mathbf{r}+\delta\mathbf{s}+\mathbf{v}(\mathbf{r}+\delta\mathbf{s})\delta t$ に移動する．この 2 点の差を見ると

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{s}' &= \mathbf{r}+\delta\mathbf{s}+\mathbf{v}(\mathbf{r}+\delta\mathbf{s})\delta t-[\mathbf{r}+\mathbf{v}(\mathbf{r})\delta t] \\
&= \delta\mathbf{s}+[\mathbf{v}(\mathbf{r}+\delta\mathbf{s})-\mathbf{v}(\mathbf{r})]\delta t
\end{aligned}
\tag{150}
$$

である．そこで，ここ微小変位のラグランジュ微分を計算すれば，

$$
\frac{\mathrm{D}\delta\mathbf{s}}{\mathrm{D}t}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\mathbf{s}'-\delta\mathbf{s}}{\delta t}=(\delta\mathbf{s}\cdot\mathrm{grad}\,)\mathbf{v} \tag{151}
$$

である．そこで，以下のベクトルを考える．

$$
\mathbf{X}=\boldsymbol{\omega}-\kappa\delta\mathbf{s} \tag{152}
$$

もし，$t=0$ で $\mathbf{X}=0$ となるように曲線を決めれば，これは渦線を表す．このベクトルのラグランジュ微分を考えると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}\mathbf{X}}{\mathrm{D}t} &= \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{D}t}-\frac{\mathrm{D}\kappa}{\mathrm{D}t}\delta\mathbf{s}-\kappa\frac{\mathrm{D}\delta\mathbf{s}}{\mathrm{D}t} \\
&= -\mathrm{div}\,\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}+(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,)\mathbf{v} \\
&\quad -\frac{\mathrm{D}\kappa}{\mathrm{D}t}\delta\mathbf{s}-\kappa(\delta\mathbf{s}\cdot\mathrm{grad}\,)\mathbf{v}
\end{aligned}
\tag{153}
$$

である．ここで，

$$
\frac{\mathrm{D}\kappa}{\mathrm{D}t}=-\kappa\mathrm{div}\,\mathbf{v} \tag{154}
$$

を満たすように，κ を決めれば，

$$
\frac{\mathrm{D}\mathbf{X}}{\mathrm{D}t}=-(\mathrm{div}\,\mathbf{v})\mathbf{X}+(\mathbf{X}\cdot\mathrm{grad}\,)\mathbf{v} \tag{155}
$$

である．また，$t=0$ では $\mathbf{X}=0$ なので，

$$
\frac{\mathrm{D}\mathbf{X}}{\mathrm{D}t}=0 \tag{156}
$$

から，常に $\mathbf{X}=0$ である．すなわち，最初の渦線の上にいた流体粒子が構成する曲線は時間が経過しても渦線の条件を満たすのである．

渦管は渦線の集合であるので，渦管を構成する流体粒子はつねに渦管を構成する．したがって，渦管の表面を一周する閉曲線は，常に，その渦管を一周する曲線となり，その曲線に沿って計算した循環は，その渦管の強さとなるが，ケルビンの循環定理を用いると，一定に保たれる．

以上で，ヘルムホルツの渦定理が証明された．

11　粘性流体

これまでは，流体の応力テンソルが静止流体の時と同じように圧力だけである場合，完全流体を扱ってきた．ここからは，粘性と呼ばれる性質を持つ流体を扱う．

11.1 変形速度テンソルとニュートン流体

流体の運動は，一様な流れ以外に局所的な変形を持つ．この変形を表す量が

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{157}$$

で表される変形速度テンソルである[3]．このテンソルは $\partial v_i/\partial x_j$ で定義されるテンソルを対称化したものであり，反対称化したものは渦度になる．

流体中の応力テンソルが変形速度テンソルの 1 次関数になるような流体をニュートン流体という．これは

$$t_{ij} = \Lambda_{ijkl}e_{kl} + p_{ij} \tag{158}$$

という関係で表される．また，流体は等方的であるはずなので $p_{ij} = -p\delta_{ij}$ かつ，

$$\Lambda_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk} \tag{159}$$

という形に限られる．これを代入すると

$$t_{ij} = a\delta_{ij}e_{ll} + (b+c)e_{ij} - p\delta_{ij} \tag{160}$$

と表される．また，$e_{ll} = \mathrm{div}\,\mathbf{v}$ なので，整理して

$$t_{ij} = \lambda\delta_{ij}\mathrm{div}\,\mathbf{v} + 2\eta e_{ij} - p\delta_{ij} \tag{161}$$

となる．ここで，η はせん断粘性率，λ は第 2 粘性率という．また，このテンソルの対角和から，

$$t_{ll} = -3p + (3\lambda + 2\eta)\mathrm{div}\,\mathbf{v} \tag{162}$$

である．このことから，$\chi = \lambda + 2\eta/3$ は体積変化に対する粘性を表し，体積粘性率と呼ばれている．非圧縮性流体では，$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$ なので，通常，粘性率というと η を指す．一般に粘性率は流体の物性で決まり，温度の関数となる．

12 ナヴィエ・ストークス方程式

式 (162) の応力テンソルを，連続体の方程式に代入すると

$$\rho\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = \mathbf{K} - \mathrm{grad}\,[p - (\lambda + \eta)\mathrm{div}\,\mathbf{v}] + \eta\Delta\mathbf{v} \tag{163}$$

となる．この方程式は，ナヴィエ・ストークスの方程式と呼ばれ，粘性流体の運動を記述する方程式である．非圧縮性の場合，少し簡単化されて

$$\rho\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = \mathbf{K} - \mathrm{grad}\,p + \eta\Delta\mathbf{v} \tag{164}$$

η を唯一のパラメータとして含む方程式となる．以降は，非圧縮性を仮定し，この方程式と $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$ を連立して解くことにする．また，体積力に関しては

$$\mathbf{K} = -\rho\mathrm{grad}\,\Lambda \tag{165}$$

と保存力を仮定すると

$$p^* = p + \rho\Lambda \tag{166}$$

とすれば，

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p^* + \nu\Delta\mathbf{v} \tag{167}$$

と書き直すことができる．ここで，$\nu = \eta/\rho$ は運動粘性率と呼ばれ，流体の運動を決める粘性のパラメータである．

この方程式は，非線形方程式であり，厳密に解くことは難しい．

12.1 粘性と渦

完全流体の場合も非線形項が存在したが，渦なしを仮定すれば，解くべき方程式は，速度ポテンシャルに対するラプラス方程式で，線形の理論を用いることができた．そして，非線形項は，圧力方程式に吸収されていたため，実質的な非線形性が見えなかった．

そこで，渦なしを仮定するとどうなるかを考えてみる．$\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\Phi$ を代入すると，粘性項は

$$\nu\Delta\mathbf{v} = \nu\mathrm{grad}\,\Delta\Phi = 0 \tag{168}$$

と消えてしまう．つまり，渦なし流では粘性が表れないのである．このことは渦の存在が粘性にとって本質的であることを示す．完全流体では渦のあるなしは絶対的な意味があった（渦の不生不滅）．しかし，実際の流れでは，例えば，渦なしの流れから循環が発生するようなことが起きるが，これは粘性の存在による．

12.2 レイノルズの相似則

式 (167) は，ν という一つのパラメータを含む．この方程式に対して，スケール変換を行う．今，流れの典型的な速さを U，流れのサイズを L としよう．このとき，典型的な時間スケールは $T = L/U$

[3]弾性論における歪みテンソルに相当する．

である．これらの量を用いて，下記のようにスケール変換し，

$$x'_i = x_i/L,\ \ t' = t/T, \\ v'_i = v_i/U, \xi = (p^*/\rho)/U^2 \tag{169}$$

という無次元量の関係に直すと，式 (167) は

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}'}{\mathrm{D}t'} = -\mathrm{grad}\,'\xi + \frac{1}{R}\Delta'\mathbf{v}' \tag{170}$$

となる（grad ′ や Δ' は x'_i に関する微分を意味する）．ここで，方程式に含まれる無次元のパラメータは

$$R = \frac{UL}{\nu} \tag{171}$$

で定義され，レイノルズ数と呼ばれている．

もし，　相似の条件が成り立つような境界条件を与えた場合，流れが相似になるかどうかは，その流れのレイノルズ数が等しくなければならない．例えば，実験を行う場合に，装置の大きさを実物の λ 分の 1 に縮小して，時間変化のスケールは実物にあわせる場合，U も λ 分の 1 にしなければならない．このとき，レイノルズ数が等しくなるためには，新しい流れでは 粘性係数は λ^2 分の 1 でなければならない．このような関係をレイノルズの相似則という．

12.3　一方向の流れの場合

ナヴィエ・ストークス方程式の厳密な解が得られる例として，一方向の流れを扱う．このとき，$\mathbf{v} = (0, 0, v)$ となる．さらに，$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$ を満たすためには

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \tag{172}$$

となるから，v は z によらない．さらに，

$$\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial t} \tag{173}$$

で，非線形項が消える（x と y の微分に関する項は，速度成分が無いので表れない）．これを式 (167) に代入すると

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{174}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{175}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{176}$$

が得られる．上の 2 つから，圧力は z だけの関数であることが分かる．また，最初の式を変形すると

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{177}$$

となるが，左辺は x と y だけの関数，右辺は z だけの関数となる．この等式が成り立つためには，両辺が共通の定数である必要がある．すなわち，

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \alpha \tag{178}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \alpha \tag{179}$$

である．下の式から，圧力は

$$p = p_0 - \rho\alpha z \tag{180}$$

と x の 1 次関数になることが分かる．

12.3.1　ポアズイユの流れ

定常流で，y 方向には一様で $x = 0$ と $x = a$ の領域に挟まれた流れを考える．このとき，解くべき方程式は

$$-\nu\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \alpha \tag{181}$$

であるから，解は

$$v = -\frac{\alpha}{2\nu}x^2 + Ax + B \tag{182}$$

である．境界条件を課す．粘性の影響で，物体の表面では法線方向だけでなく，すべての方向の速度成分が 0 となる．これを満たす解は

$$v = -\frac{\alpha}{2\nu}x(x - a) \tag{183}$$

となる．このような流れを平面ポアズイユの流れという．

この流れにより境界面が単位面積あたりに受ける力は応力テンソルの t_{zx} を計算すればよい．

$$t_{zx} = \eta\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\rho\alpha}{2}(2x - a) \tag{184}$$

である．$x = 0$ の面では，壁の受ける力は単位面積あたり，$f_z = \rho\alpha a/2$ である．また，$x = a$ の面では，法線ベクトルの向きが $-x$ の方向であることを考えると同様に $f_z = \rho\alpha a/2$ となり，圧力勾配 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = -\alpha\rho$ に比例することがわかる．

12.3.2 クエットの流れ

同じ条件で，$x=a$ の壁面が，z 方向に速度 U で運動している場合で，圧力勾配がない（$\alpha=0$）の場合，

$$v=\frac{U}{a}x \tag{185}$$

である．このような流れはクエットの流れと呼ばれている．

12.3.3 ハーゲン・ポアズイユの流れ

半径 a の円筒内を流れる軸対称な流れを考える．この場合，解くべき方程式は

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{\alpha}{\nu} \tag{186}$$

であるが，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ と変数を選ぶと

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \tag{187}$$

であり，軸対称性を考えると

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{\alpha}{\nu} \tag{188}$$

となる．この解は，

$$v=-\frac{\alpha}{4\nu}r^2+A\log r+B \tag{189}$$

である．境界条件は，$r=0$ で有限であり，$r=a$ で $v=0$ である．よって，

$$v=-\frac{\alpha}{4\nu}(r^2-a^2) \tag{190}$$

で与えられる．この管を単位時間当たりに流れる流体の量は

$$Q=\int_0^a v2\pi r\mathrm{d}r=\frac{\pi\alpha a^4}{8\nu}=\frac{\pi a^4}{8\eta}\left|\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right| \tag{191}$$

で与えられ，半径の 4 乗に比例する．流量が圧力勾配と半径の 4 乗に比例し，粘性率に反比例するというのはハーゲン・ポアズイユの法則と呼ばれている．

12.3.4 振動する解

非定常な場合，$x=0$ の板が z 方向に $v=U\cos\Omega t$ で振動している場合を考える．このとき，解くべき方程式は

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)=0 \tag{192}$$

である (圧力勾配は無いとした)．この場合，$v(t,x)=\exp(\mathrm{i}\Omega t-kx)$ と仮定すると

$$\mathrm{i}\Omega-k^2\nu=0 \tag{193}$$

ここから，

$$k=\pm\sqrt{\frac{\mathrm{i}\Omega}{\nu}}=\pm(1+\mathrm{i})\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}=\pm(1+\mathrm{i})\gamma \tag{194}$$

で与えられる．$v(t,x)=\exp(-\mathrm{i}\Omega t-k'x)$ を仮定すると

$$k'=\pm\sqrt{\frac{-\mathrm{i}\Omega}{\nu}}=\pm(1-\mathrm{i})\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}=\pm(1-\mathrm{i})\gamma \tag{195}$$

が得られる．これらの線形結合で解を構成すると

$$\begin{aligned}v=&\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\left[A\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\gamma x}+B\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})\gamma x}\right]\\&+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\left[C\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})\gamma x}+D\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})\gamma x}\right]\end{aligned} \tag{196}$$

のようになる．ここで，

$$\gamma=\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}} \tag{197}$$

境界条件に関しては，$x\to\infty$ で $v=0$ を満たす解を探すと $\gamma>0$ だから $A=C=0$ である．また，$x=0$ では $v=U\cos\Omega t$ が必要で，

$$U\cos\Omega t=B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}+D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t} \tag{198}$$

となるから，$B+D=U$，$(B-D)=0$ となる．これを入れて整理すると

$$v=U\mathrm{e}^{-\gamma x}\cos(\omega t-\gamma x) \tag{199}$$

となる．この解は，板の振動の影響は $1/\gamma$ 程度の部分にしか存在しないことを表している．このように，粘性の流体では境界面の沿った部分で粘性の影響が強く現れる部分が存在し，境界層と呼ばれているものの例であり，ストークス層と呼ばれている．

12.4 ストークス近似

流速がゆっくりな場合，レイノルズ数が小さい場合，ナヴィエ・ストークス方程式の非線形項を無視すると，

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p+\nu\Delta\mathbf{v} \tag{200}$$

という方程式が得られる．このような近似はストークス近似と呼ばれている．この近似の範囲では，式 (200) の両辺の発散を計算すると

$$\Delta p = 0 \tag{201}$$

が得られる．このことは，圧力は調和関数で表されるということである．また，両辺の回転を計算すると

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \tag{202}$$

が得られ，渦度ベクトルは拡散方程式に従うことが分かる．

12.4.1 基本解

ここでは，定常流を考える．解くべき方程式は

$$\eta \Delta \mathbf{v} = \mathrm{grad}\, p \tag{203}$$

である．

この方程式は，線形方程式のため解の重ね合わせが可能である．また，$\mathbf{v}_\mathrm{h} = \mathrm{grad}\,\Phi$ かつ，$\Delta\Phi = 0$ を満たす解を加えることも可能である．このような形で解を構成するための基本となる解が以下のように与えられている．まず，z 方向に一様な流れが存在する場合を元に考える．このとき，圧力を

$$p_\mathrm{e} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{204}$$

とする．こうすると，

$$\Delta p = \frac{\partial}{\partial z}\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \ \ (r \neq 0) \tag{205}$$

が得られるので，解の候補である．次に$\Delta r = 2/r$という関係を考えて，

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2\eta}\mathrm{grad}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right) \tag{206}$$

としてみると，

$$\eta \Delta \mathbf{v}_1 = \mathrm{grad}\, p_\mathrm{e} \tag{207}$$

を満たすことはすぐに分かる．次に，$\mathrm{div}\,\mathbf{v}_1$ を計算すると，

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2\eta}\Delta\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right) = \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{208}$$

で，0 にならない．そこで，

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\eta r}\mathbf{e}_z \tag{209}$$

というベクトルを考えると，$\Delta \mathbf{v}_2 = 0$ であり，

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{210}$$

なので，

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_\mathrm{e} &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \\ &= \frac{1}{2\eta}\mathrm{grad}\,\frac{\partial r}{\partial z} - \frac{1}{\eta r}\mathbf{e}_z \\ &= -\frac{1}{2\eta}\left(\frac{xz}{r^3}, \frac{yz}{r^3}, \frac{z^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right)\end{aligned} \tag{211}$$

とすれば，p_e と $\mathbf{v}_\mathrm{e}$ は式 (203) の解となる．この組み合わせはストークスレットと呼ばれる基本解である．このさらに，この解を x，y，z で任意回数微分したものも解となっているので，これらの線形結合で解を構成できる．

12.4.2 一様な流れの中の球

この流体の中に，半径 a の球を入れる．境界条件は，$r = a$ で，$\mathbf{v} = 0$ かつ，$r \to \infty$ で，$\mathbf{v} \to U\mathbf{e}_z$ かつ，$p \to p_\infty$ である．このとき，解を

$$\mathbf{v} = U\mathbf{e}_z + A\mathbf{v}_\mathrm{e} + B\mathbf{v}_\mathrm{h} \tag{212}$$

とし，

$$p = p_\infty + Ap_\mathrm{e} \tag{213}$$

また，完全流体の場合を参考にして，

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_\mathrm{h} &= \mathrm{grad}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \\ &= \left(\frac{3xz}{r^5}, \frac{3yz}{r^5}, \frac{3z^2 - r^2}{r^5}\right)\end{aligned} \tag{214}$$

としてみる．球面上での境界条件を課すと，

$$\frac{A}{2\eta} - \frac{3B}{a^2} = 0 \tag{215}$$

$$U - \frac{A}{2\eta a} - \frac{B}{a^3} = 0 \tag{216}$$

である．これを解くと

$$A = \frac{3}{2}\eta U a,\ B = \frac{U}{4}a^3 \tag{217}$$

が得られる．

この時，球に働く力は，球面上の積分で

$$F_i = \int t_{ij} n_j \mathrm{d}S \tag{218}$$

であり，

$$t_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{219}$$

である．力の働く方向は，対称性から z 方向に限られる．半径 a の球面上で応力の z 成分を計算すると

$$\begin{aligned} t_{zj}n_j|_{r=a} &= -p\cos\theta + \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + n_j\frac{\partial v_j}{\partial z}\right) \\ &= -p_\infty\cos\theta + \frac{3\eta U}{2a} \end{aligned} \tag{220}$$

となる[4]．これを，球面で積分すれば，

$$F_z = 6\pi\eta a U \tag{221}$$

が得られる．これを，ストークスの抵抗の法則という．

12.5 オセーン近似

ストークス近似では，流速が遅いと仮定し，非線形項である $(\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\,)\mathbf{v}$ を無視した．この近似が妥当であるためには，粘性項 $\nu\Delta\mathbf{v}$ と比較して十分小さいという条件が必要である．もし，粘性が0なら，完全流体の議論に戻るはずであり，そこでは，非線形項は重要な意味をもつ．この議論を行うためには，スケールを見積もる必要がある．今，$(\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\,)\mathbf{v}$ のスケールは，U^2/L であり，$\nu\Delta\mathbf{v}$ のスケールは $\nu U/L^2$ であるから，その比は $U^2/L/(\nu U/L^2) = UL/\nu = R$ である．すなわち，レイノルズ数が小さいという条件が必要であることが分かる．

ところで，前節で議論した一様流の問題を考えてみる．十分遠方では，$\mathbf{v} \sim U\mathbf{e}_z$ であるから，

$$(\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\,)\mathbf{v} \sim U\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z} \propto \frac{U^2 a}{r^2} \tag{222}$$

であるが，粘性項は

$$\nu\Delta\mathbf{v} \propto \frac{Ua\nu}{r^3} \tag{223}$$

である．この比は，Ur/ν であり，r が大きくなると，非線形項の大きさが粘性項を越える．このことは，ストークス近似が破綻することを意味する．すなわち，一様流を扱う場合，十分遠方での流れに対してはストークス近似が成り立たないことを意味している．そこで，一様流による項を残した

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + U\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p + \nu\Delta\mathbf{v} \tag{224}$$

という近似方程式が提案されている．この近似をオセーン近似という．このとき，流体の速度ベクトルは $U\mathbf{e}_z + \mathbf{v}$ で与えられる．この方程式もストークス近似と同様に線形であるから，元々のナヴィエ・ストークス方程式よりも取り扱いが易しくなっているが，球面での境界条件を満たす厳密解は見つかっていない．

式 (224) の両辺の発散を計算すると，$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$ から，$\Delta p = 0$ が得られる．すなわち，圧力が調和関数になるのは，ストークス近似と同じである．回転を計算すると

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + U\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial z} = \nu\Delta\boldsymbol{\omega} \tag{225}$$

となる．

また，ストークス近似と大きく異なるのは，z が正の領域と負の領域で流れが対称でないことである．これは，方程式に z の一階微分が含まれているためである．例えば，式 (225) にたいして，$\kappa = U/(2\nu)$ とすると

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{-\kappa z}\left(-2\kappa\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f \\ &= \left(-\kappa^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\mathrm{e}^{-\kappa z}f) \end{aligned} \tag{226}$$

であるから，

$$\mathrm{e}^{-\kappa z}\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu(\Delta - \kappa^2)(\mathrm{e}^{-\kappa z}\boldsymbol{\omega}) \tag{227}$$

が得られる．定常な場合では，

$$(\Delta - \kappa^2)(\mathrm{e}^{-\kappa z}\boldsymbol{\omega}) = 0 \tag{228}$$

であるが，この解で $r \to \infty$ で有限なものは

$$\boldsymbol{\omega} \propto \frac{\exp[-\kappa(r-z)]}{r} \tag{229}$$

であるが，z が負の領域では急速に小さくなる．$r-z$ が一定の値をとる曲線は

$$r = \frac{a}{1-\cos\theta} \tag{230}$$

であるが，これは，原点を焦点とする放物線（実際は z 軸の回りの回転放物面）となる．このように，渦の存在できる領域が限られているということ，かつ，流れの上流側と下流側では，その領域に差があることなどが理解できる．

また，球の場合で $r = a$ での条件を満たす解を近似的に求め，働く力を計算すると，一番粗い近似では，ストークス近似の場合と等しいことが示されている．

[4] 丁寧に計算すると $n_j\partial v_j/\partial z|_{r=a} = 0$ である．