

# 『変形体の力学』講義資料 No.2【弾性体】

## 1 固体の変形

固体は、外力を加えない状態では一定の形を保っている。しかし、力を加えると変形する。力を取り除くと元に戻るような変形は弾性変形と呼ばれる。この変形の量は、加える力の大きさに依存する。例として、棒を引っ張って伸ばす場合を考えよう。力が小さい間は、棒の伸びは加えた力に比例する。力が大きくなるにしたがって、力の大きさと伸びの関係は非線形になる。さらに、大きな力を加えると力を取り除いても変形が残るようになる。このような変形を塑性変形という。もっと、力を大きくすると最終的には破断する。ここでは、変形が線形弾性的である範囲で議論することにする。固体を、弾性変形という観点で議論する場合、弾性体と呼ぶ。弾性体の性質は、建物や機械を構成する構造材料の特性として非常に重要である。

## 2 変形ベクトルと歪みテンソル

弾性体の変形は変形ベクトルという量で表される。図1に示すように、変形前に  $\mathbf{r}$  にあった構成粒子 A が、変形により  $\mathbf{r}'$  に移動したとすると、

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

となるようなベクトル  $\mathbf{u}$  である<sup>1</sup>。この変形ベクトルが分かれば、弾性体の運動が記述できることになるが、物体が形を変えずに一様に運動する場合でも、変形ベクトルは0とならないので、変形のみを議論するには不十分である。そこで、近傍の構成粒子 B との距離の変化を計算してみる。B の座標を  $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$  とすると、変形後の位置は

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t) \quad (2)$$

<sup>1</sup>この定義では、変形前の座標の関数として考えているので、ラグランジュ的な描像で議論をしていることになるが、固体の変形は非常に小さいので、この差を区別しないで議論することが多い。

で与えられる。変形前の2つの点の距離  $\delta s$  は

$$\delta s = |\mathbf{r} + \delta\mathbf{r} - \mathbf{r}| = |\delta\mathbf{r}| \quad (3)$$

である。変形後の距離  $\delta s'$  は

$$\begin{aligned} \delta s' &= |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'| \\ &= |\delta\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)| \end{aligned} \quad (4)$$

となる。ここで、 $\delta\mathbf{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$  とすると

$$u_i(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t) - u_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta x_j \quad (5)$$

と近似して計算すると

$$\begin{aligned} \delta s'^2 &= \delta x_i \delta x_i + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta x_i \delta x_j \\ &= \delta s^2 + 2 s_{ij} \delta x_i \delta x_j \end{aligned} \quad (6)$$

となる。ここで、 $\delta s^2 = \delta x_i \delta x_i$ 、および、

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

で定義される歪みテンソルを用いた。

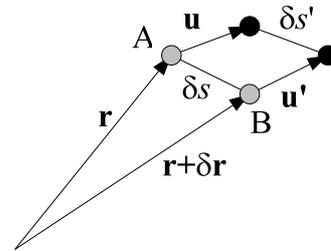


図1: 変形ベクトルと歪み

この計算では  $\partial u_i / \partial x_j$  という量を対称な成分  $s_{ij}$  と反対称な成分

$$r_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

にわけ、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta x_i \delta x_j &= (s_{ij} + r_{ij}) \delta x_i \delta x_j \\ &= s_{ij} \delta x_i \delta x_j \end{aligned} \quad (9)$$

という変形を行った（反対称な部分は和をとると0,つまり $r_{ij}\delta x_i\delta x_j = 0$ である）. この歪みテンソル $s_{ij}$ が弾性体の変形を表す量であると考えられる<sup>2</sup>.

## 2.1 体積の変化率

式(1)の関係は, 変形前の座標 $\mathbf{r}$ と変形後の座標 $\mathbf{r}'$ の関係を表す. この関係に, ラグランジュの連続の式を用いると

$$\rho \frac{\partial(x', y', z')}{\partial(x, y, z)} = \rho_0 \quad (10)$$

である. この両辺は質量が等しいことから導かれた関係なので, 体積の変化は

$$\frac{\Delta V'}{\Delta V} = \frac{\partial(x', y', z')}{\partial(x, y, z)} \quad (11)$$

となる. とここで,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x', y', z')}{\partial(x, y, z)} &= \text{Det} \left[ \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \\ &\approx 1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 1 + \text{div } \mathbf{u} \end{aligned} \quad (12)$$

である ( $\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタ,  $\text{Det}[\ ]$ は行列式を意味する). ここで,  $\partial u_i / \partial x_j$ の1次までの項を計算した. 結局, 相対的な体積変化率は

$$\frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V} = \text{div } \mathbf{u} \quad (13)$$

で与えられる.  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ を満たすような変形では体積変化がないので, 密度が一定に保たれる.

## 3 フックの法則

固体の変形では, 微小な変形領域では, 働く力と変形量が比例する. この弾性変形の性質はフックの法則と呼ばれている. 通常, フックの法則は, ばねの伸び $x$ とばねに働く力 $f$ の関係として

$$f = kx \quad (14)$$

<sup>2</sup>反対称な成分は, 全体が剛体的に回転する運動を表す. 例えば,  $z$ 軸の周りに, 微小角 $\delta\theta$ だけ回転したとき,  $A$ の位置は $(x - y\delta\theta, y + x\delta\theta, z)$ に移る. したがって,

$$\mathbf{u} = (-y\delta\theta, x\delta\theta, 0)$$

であるから,  $r_{xy} = -r_{yx} = -\delta\theta$ である.

と表される (−をつけないのは, 働く力を基準にしたためである).  $k$ はばね定数と呼ばれている. これを, 弾性体(連続体)の変形にたいして表現すると応力テンソルと歪みテンソルが比例するという関係になる. ただし, 比例関係は, テンソルの各成分が比例するわけではなく,

$$t_{ij} = C_{ijkl}s_{kl} \quad (15)$$

と新たなテンソル $C_{ijkl}$ を用いて関係付けられる. このテンソルは添え字が4個あり, 4階のテンソルで, 弾性率テンソルと呼ばれている.

弾性率テンソルは, 弾性体を構成する物質の構造に関係している. 物質によっては, 加える力の向きによって, 変形の仕方が異なるような構造をしている物は世の中にたくさん存在する. 弾性率テンソルは, 単純に考えると $3^4 = 81$ 個の成分を持つテンソルであるが, 応力テンソルと歪みテンソルが対称なため,  $i$ と $j$ , 及び $k$ と $l$ の交換に対して対称ある. このため,  $\{ij\}$ の組み合わせ(6個)の独立な成分があることになり,  $6 \times 6 = 36$ の成分に減る. さらに, 弾性エネルギー(後述)を考えると $\{ij\}$ と $\{kl\}$ の交換にも対称となるので,  $6 + (36 - 6)/2 = 21$ 個の成分が独立である. さらに, 物質の構造に対称性がある場合, その独立な成分の数は減る.

その中で一番単純な構造は, 完全に等方的な物質であり, この場合の弾性率テンソルは著しく単純化されて, 2つの定数 $\lambda$ と $\mu$ を用いて

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (16)$$

で表されることが知られている. この2つの定数はラメの弾性定数と呼ばれている. このとき, フックの法則は

$$\begin{aligned} t_{ij} = C_{ijkl}s_{kl} &= [\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})]s_{kl} \\ &= \lambda\delta_{ij}s_{kk} + \mu(s_{ij} + s_{ji}) \\ &= \lambda\delta_{ij}\text{div } \mathbf{u} + 2\mu s_{ij} \end{aligned} \quad (17)$$

と表される.

ほとんど全ての金属材料, ガラス材料などは等方弾性体と考えることが可能であり, 応用上も重要である. ここでは, 等方弾性体に限って議論を進めることにする.

### 3.1 等方弾性体の変形に関する方程式

連続体の応力に関するつりあいの方程式は

$$\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} + K_i = 0 \quad (18)$$

である ( $K_i$  は体積力の成分) . ここに, 式 (7) と式 (17) を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} &= \lambda \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (19)$$

であるので,

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{K} = 0 \quad (20)$$

というベクトルの方程式が得られる . ここで,  $\Delta$  はラプラス演算子で

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (21)$$

となる . ただし,  $\Delta \mathbf{u}$  という演算は, 直交座標系で計算を行う場合のみの形式である . もし, 一般の座標系で計算する場合は

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} \quad (22)$$

という直交座標系で成り立つ関係を用いて,  $\Delta \mathbf{u}$  を消去し,

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \mathbf{K} = 0 \quad (23)$$

とすると, 任意の座標系で成り立つ表式が得られる . 式 (20) や式 (23) は, 等方弾性体の変形ベクトルを決定する方程式である . この方程式を与えられた境界条件のもとで解けば, 等方弾性体の変形は決定できる .

### 3.2 境界条件

変形の問題は, 境界条件を満たすように解く必要がある . 境界条件は, 弾性体の表面において, 固定されている条件 (固定端) では, 変形ベクトルが 0 となる必要がある . また, 単位面積当たりの外力  $\tilde{f}_i$  が加わる表面では, 応力の法線成分がこれとつりあう, すなわち

$$t_{ij} n_j = \tilde{f}_i \quad (24)$$

となる .  $n_j$  はその面の法線ベクトルの成分を表す .

### 3.3 弾性変形のエネルギー

ばねの力を受けて運動する物体は, その力の位置エネルギーとして,

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \quad (25)$$

を持つ . これは, ばねの変形によってばねに蓄えられた弾性エネルギーと解釈される . 一般の弾性体でも変形するとその変形によってエネルギーを蓄える . これは歪みエネルギーと呼ばれる . 歪みエネルギーは, 歪みテンソルの関数として与えられる . また, 場所により歪みが異なるので, 単位体積あたりの歪みエネルギー  $\epsilon_{el}$  を用いて

$$E_{el} = \int_V \epsilon_{el} dV \quad (26)$$

と表せる . このエネルギー密度に対して,  $\epsilon_{el} = \epsilon_{el}(s_{ij})$  とすれば, 歪みが小さいとき  $s_{ij}$  のべき級数で展開できるはずで, 2 次までとれば

$$\epsilon_{el}(s_{ij}) = \epsilon_0 + \left. \frac{\partial \epsilon_{el}}{\partial s_{ij}} \right|_0 s_{ij} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \epsilon_{el}}{\partial s_{ij} \partial s_{kl}} \right|_0 s_{ij} s_{kl} \quad (27)$$

と表される ( $|_0$  は  $s_{ij} = 0$  の値を意味する) . 外力の無い状態では,  $s_{ij} = 0$  はエネルギーの極小値を与えるはずなので,

$$\left. \frac{\partial \epsilon_{el}}{\partial s_{ij}} \right|_0 = 0 \quad (28)$$

である . また,  $\epsilon_0$  は 0 としてよい . したがって,

$$\epsilon_{el}(s_{ij}) = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \epsilon_{el}}{\partial s_{ij} \partial s_{kl}} \right|_0 s_{ij} s_{kl} \quad (29)$$

と表すことができる . このときは, 歪みテンソルを微小量変化させると

$$\delta \epsilon_{el} = \left. \frac{\partial^2 \epsilon_{el}}{\partial s_{ij} \partial s_{kl}} \right|_0 s_{kl} \delta s_{ij} \quad (30)$$

と表すことができる .

実際, ある応力のもとで, 変位ベクトルを微小に変化させる時の仕事を計算してみる . 弾性体内のある点に働く応力は,

$$f_i = \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \quad (31)$$

で与えられから，変位ベクトルの微小変化  $\delta u_i$  を与えるために必要な仕事は，

$$\delta W = \int_V \delta u_i \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (32)$$

となる．これを

$$\delta u_i \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial(\delta u_i t_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} t_{ij} \quad (33)$$

と変形して，第1項は表面積分に変化すると

$$\delta W = \int_S \delta u_i t_{ij} n_j dS - \int_V \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} t_{ij} dV \quad (34)$$

と書ける．ここで， $t_{ij}$  が対称テンソルであることを用いると右辺の第2項は

$$\int_V \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} t_{ij} dV = \int_V \delta s_{ij} t_{ij} dV \quad (35)$$

と歪みテンソルの微小変化量との縮約で表すことができる．右辺の第1項は，この弾性体の表面を通して働く外力のする仕事と解釈できる．左辺は応力のする仕事であるが，たとえば，応力以外に，単位質量あたりの位置エネルギー  $\Lambda$  をもつ保存力が働き，応力と釣り合っている場合を考えると

$$-\rho \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} + \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (36)$$

が成り立つので，この両辺に  $\delta u_i$  を掛けて積分すると

$$\delta W = \int_V \rho \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} \delta u_i dV = \int_V \rho \delta \Lambda dV = \delta U \quad (37)$$

と全体のもつ体積力の位置エネルギーの増加  $\delta U$  になる．ここで，

$$\delta \Lambda = \Lambda(\mathbf{r} + \delta \mathbf{u}) - \Lambda(\mathbf{r}) = \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} \delta u_i \quad (38)$$

とした．このことを考えると，式(35)は，弾性体の内部に蓄えられる歪みエネルギー  $E_{el}$  の変化量と解釈できる．すなわち，

$$\delta E_{el} = \int_V t_{ij} \delta s_{ij} dV \quad (39)$$

である．この式と式(30)を比較すると，

$$t_{ij} = \frac{\partial^2 \epsilon_{el}}{\partial s_{ij} \partial s_{kl}} \Big|_0 s_{kl} \quad (40)$$

と，応力テンソルと歪みテンソルの線形関係，すなわち，フックの法則が得られる．そして，弾性率テンソルは

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \epsilon_{el}}{\partial s_{ij} \partial s_{kl}} \Big|_0 \quad (41)$$

という関係で表され，前に述べた  $\{ij\}$  と  $\{kl\}$  組の交換に対して対称であることが示された．さらに，フックの法則にしたがうと，弾性体の歪みエネルギーは単位体積あたり

$$\epsilon_{el} = \frac{1}{2} C_{ijkl} s_{ij} s_{kl} \quad (42)$$

で表されることがわかる．

## 4 一様変形

ここでは，一様な力の下での弾性体の変形を考える．弾性体は等方的であるとする．まず，直方体（辺の長さを  $a, b, c$  とする）を考える．

### 4.1 ヤング率とポアソン比

図2のように，直方体の対向する面に逆向きに面内で一様な力  $F$  を加える（向きは法線方向を正とするので，正の場合，引っ張りの力になる．図の応力は負の状態を表す）．力は  $z$  方向に加えることにする． $z$  方向の変形量を  $\delta c$  とすれば， $s_{zz} = -\delta c/c$ ， $s_{xx} = \delta a/a$  となる（ $\delta c$  は縮む向きを正にとってある）．

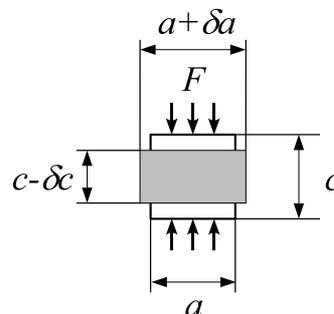


図 2: 一様変形

この状態で釣り合っているので、

$$\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (43)$$

となる。さらに、表面で加えられている力と釣り合う。この条件は

$$t_{zz} = -\frac{F}{ab} \quad (44)$$

で、これ以外の成分は0という場合に満たされる。これと、式(17)を用いると

$$t_{xx} = \lambda(s_{xx} + s_{yy} + s_{zz}) + 2\mu s_{xx} = 0 \quad (45)$$

$$t_{yy} = \lambda(s_{xx} + s_{yy} + s_{zz}) + 2\mu s_{yy} = 0 \quad (46)$$

$$t_{zz} = \lambda(s_{xx} + s_{yy} + s_{zz}) + 2\mu s_{zz} = -\frac{F}{ab} \quad (47)$$

であり、 $s_{ij}$ の非対角項は0となる。ここから、すべての式を加えると

$$s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} = -\frac{F}{ab(3\lambda + 2\mu)} \quad (48)$$

は、すぐに得られる。そして、

$$s_{zz} = -\frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{F}{ab} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} t_{zz} \quad (49)$$

と

$$s_{xx} = s_{yy} = -t_{zz} \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \quad (50)$$

が得られる。ここで、ヤング率  $Y$  とポアソン比  $\sigma$  を

$$t_{zz} = Y s_{zz}, \quad s_{xx} = s_{yy} = -\sigma s_{zz} \quad (51)$$

と定義すると

$$Y = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (52)$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (53)$$

とラメ定数を用いて表される。ヤング率とポアソン比は等方弾性体の独立な弾性定数であり、ラメ定数よりも用いられる場合が多い。逆に解けば

$$\lambda = \frac{Y\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \quad (54)$$

$$\mu = \frac{Y}{2(1 + \sigma)} \quad (55)$$

となる。

図2の場合、

$$Y \frac{\delta c}{c} = \frac{F}{ab}, \quad \frac{\delta a}{a} = \sigma \frac{\delta c}{c} \quad (56)$$

が成り立つ。

注意すべき点は、ポアソン比が0でない場合、張力の方向以外にも変形が生じることである。棒を引っ張ると、長手方向には伸びるがそれと直角な方向には縮む ( $\sigma > 0$  の時)。

## 4.2 体積弾性率

一方向からの外力ではなく、等方的な圧力で変形を起こす場合を考えよう。具体的には弾性体の3方向から一様な圧力  $p$  を掛ける場合である。このとき、応力テンソルは

$$t_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (57)$$

で表されるので、

$$t_{xx} = \lambda(s_{xx} + s_{yy} + s_{zz}) + 2\mu s_{xx} = -p \quad (58)$$

$$t_{yy} = \lambda(s_{xx} + s_{yy} + s_{zz}) + 2\mu s_{yy} = -p \quad (59)$$

$$t_{zz} = \lambda(s_{xx} + s_{yy} + s_{zz}) + 2\mu s_{zz} = -p \quad (60)$$

である。したがって

$$s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} = -\frac{3p}{(3\lambda + 2\mu)} \quad (61)$$

である。ところで、 $s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} = \text{div } \mathbf{u}$  は変形による体積変化率  $\Delta V/V$  を表すから、体積弾性率  $K_V$  を

$$K_V = -\frac{pV}{\Delta V} = -\frac{p}{\text{div } \mathbf{u}} \quad (62)$$

と定義すると、

$$K_V = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{Y}{3(1 - 2\sigma)} \quad (63)$$

となる。

## 4.3 剛性率

今度は面に平行に力を加える。図3のように直方体を  $z$  軸の方向から見た時、 $x$  軸に垂直な

面には  $y$  方向に、 $y$  軸に垂直な面には  $x$  方向に力を加える。ただし、全体では、力が釣り合い、力のモーメントも 0 になっているとする。このときは、弾性体に発生する応力は  $t_{xy} = t_{yx}$  以外の成分は 0 で、

$$t_{yx} = \frac{F_y}{bc}, t_{xy} = \frac{F_x}{ac} \quad (64)$$

であり、モーメントの釣り合いから  $F_x b = F_y a$  である ( $t_{xy} = t_{yx}$  と矛盾しない)。したがって、歪みテンソルは

$$s_{xy} = \frac{t_{xy}}{2\mu} \quad (65)$$

となる。この変形は、

$$u_x = \alpha y, u_y = \beta x \quad (66)$$

とすればよいが、回転が無いという条件を考えると  $\partial u_x / \partial y = \partial u_y / \partial x$  なので、 $\alpha = \beta$  である。このような変形は純せん断変形と呼ばれて、断面の形が長方形から、平行四辺形に変化する<sup>3</sup>。このとき、 $s_{xy} = \alpha$  である。変形後の平行四辺形の角度を  $\pi/2 \pm \theta$  とすると、 $\theta = 2\alpha$  である。この角度が、直方体の変形の量を表すので、

$$G = \frac{t_{xy}}{\theta} = \frac{1}{2} \frac{t_{xy}}{s_{xy}} = \mu = \frac{Y}{2(1+\sigma)} \quad (67)$$

でせん断変形に対する弾性率を定義し、剛性率と呼ぶ。

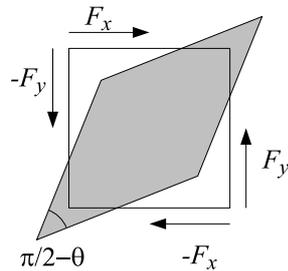


図 3: せん断変形

<sup>3</sup> $\alpha = 0$  または  $\beta = 0$  の場合は、単純せん断変形と呼ばれていて、回転運動を含んでいる。

#### 4.4 ポアソン比の制限

これまで出てきた弾性定数は基本的に独立な 2 つの量の組み合わせでかけるが、 $Y > 0$ 、 $K_V > 0$ 、 $G > 0$  でなければならない。このため、ポアソン比は  $-1 < \sigma < 1/2$  の範囲にななければならない。しかし、普通の物質では  $\sigma \geq 0$  であることが知られている。引っ張ると細くなるのであるが、特殊な物質ではポアソン比が負になる物質も見つかっている。

### 5 棒の曲げ

ここでは、一様な断面をもつ棒の曲げを考えることにしよう。棒は一様な断面を持つので、その幾何学的な中心線を考える。この中心線の形を与えることで、棒の曲げ変形が与えられる。

#### 5.1 曲げに伴う応力と変形

変形を加える場合、中心線に垂直な断面に働く力が生じる。これを考える。応力と体積力が釣り合っている場合は、式 (18) が成り立つ。そして、図 4 のように 2 つの近接した断面 ( $S_1$  と  $S_2$ ) と棒の側面で囲まれた体積で、式 (18) を積分すると、

$$\int \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} dV = - \int K_i dV \quad (68)$$

であるが、左辺はガウスの定理で表面積分に書き換えることができる。さらに、棒の側面は自由な面なので応力の法線成分が 0 となることを用いて、

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} dV &= - \int_{S_1} t_{ij} \zeta_j dS + \int_{S_2} t_{ij} \zeta'_j dS \\ &= -(F_1)_i + (F_2)_i \end{aligned} \quad (69)$$

と書ける。ここで、 $\zeta_j$  は  $S_1$  の法線ベクトルの成分、 $\zeta'_j$  は  $S_2$  の法線ベクトルの成分、 $(F_k)_j$  は  $S_k$  面に働く力の成分である。いま、断面の位置を指定するとき基準点から中心線が各断面と交わる点までの線の長さを  $s$  をすると

$$-F_i(s_1) + F_i(s_2) = - \int K_i dV \quad (70)$$

と書ける． $s_2 = s_1 + ds$  とすれば

$$\frac{dF_i}{ds} = - \int_{S_1} K_i dS \quad (71)$$

となる．もし，体積力が働かないとすると，

$$\frac{dF_i}{ds} = 0 \quad (72)$$

と， $F_i$  は一定の値をとる．

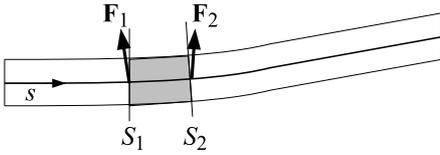


図 4: 棒の変形

力のモーメントに関しても，同様な計算を行う．式 (18) に  $\varepsilon_{kli} x_l$  を掛け  $l$  と  $i$  に関して縮約し，体積で積分すると，ガウスの法則と応力テンソルの対称性から

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{kli} \int x_l \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} dV \\ &= \varepsilon_{kli} \left( - \int_{S_1} x_l t_{ij} \zeta_j dS + \int_{S_2} x_l t_{ij} \zeta_j' dS \right) \\ &= -\varepsilon_{kli} \int x_l K_i dV \end{aligned} \quad (73)$$

である．ここで，積分の原点を  $S_1$  と中心線が交わる点とすると， $S_1$  面での応力のモーメントは

$$N_k(s) = \varepsilon_{kli} \int_{S_1} x_l t_{ij} \zeta_j dS \quad (74)$$

と表される．このとき， $S_1$  と  $S_2$  の中心を結ぶベクトルが  $S_1$  面の法線ベクトル（同時にこれは中正線の接線ベクトルである）を用いると，元の変数  $x_l$  と  $S_2$  上の変数  $x_l'$  は  $x_l = x_l' + \zeta_l ds$  と表されるから，

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{kli} \int_{S_2} x_l t_{ij} \zeta_j' dS \\ &= \varepsilon_{kli} \int_{S_2} (x_l' + \zeta_l ds) t_{ij} \zeta_j' dS \\ &= \varepsilon_{kli} \zeta_l F_i(s + ds) ds + N_k(s + ds) \end{aligned} \quad (75)$$

となる．したがって，

$$\frac{dN_k}{ds} + \varepsilon_{kli} \zeta_l F_i = -\varepsilon_{kli} \int x_l K_i dS \quad (76)$$

体積力が働かない場合は，

$$\frac{dN_k}{ds} + \varepsilon_{kli} \zeta_l F_i = 0 \quad (77)$$

である．この式を  $s$  で微分すると，

$$\frac{d^2 N_k}{ds^2} + \varepsilon_{kli} \frac{d\zeta_l}{ds} F_i = 0 \quad (78)$$

となる．ここで，式 (72) を用いて， $F_i$  に関する微分は 0 とした．

与えられ条件のもとで，上記の方程式を解くことにより棒の変形を求めることができる．

## 5.2 単純な曲げ

棒の長手方向に一樣な引っ張りや圧縮が無い場合，棒は曲げることで，断面内に応力が発生するが，その主要な成分は曲げに伴う棒の伸縮である．棒の長手方向を  $x$ ，とし，棒の断面の座標を  $y$  と  $z$  とする．棒の曲げは  $x-y$  面内で考えることにする．このとき，棒の断面を考えると，伸縮のない点が存在する．この点は棒に沿って線状に存在するので，中正線と呼ばれる<sup>4</sup>．棒の曲げは中正線の形によって与えることができる．いま，中正線の形状は，局所的に円周で近似できる（図 5）．この円周の半径を  $R$  としよう．そしてこの円の中心から中心角  $\delta\theta$  の扇形を考える．棒がこの扇形で切り取られる部分の応力を考えよう．この領域での中正線の長さは  $\ell = R\delta\theta$  である．棒の断面内で円の中心方向への座標を  $y$  とし，円周上の点を  $y = 0$  とする．このとき棒の長手方向に沿っての長さは  $\ell + \delta\ell = (R - y)\delta\theta$  となる．したがって，歪みに直せば

$$s_{xx} = \frac{\delta\ell}{\ell} = -\frac{y}{R} \quad (79)$$

である．ヤング率を用いれば，応力が計算できて

$$t_{xx} = Y s_{xx} = -\frac{Yy}{R} \quad (80)$$

<sup>4</sup>この場合では， $z$  方向への曲げを考えていないので，中正線ではなく，中正面として存在する．

である．この式によって，棒の断面内に働く力がきまる．この力を面全体で積分すると，

$$F_x = -\frac{Y}{R} \int y dy dz \quad (81)$$

であるが，中正線の定義より  $F_x = 0$  となるような位置を原点とするべきである．これは，中正線の  $y$  座標は，面の幾何学的重心になることを表している<sup>5</sup>．したがって，単純な曲げの場合の中正線は，棒の中心線に一致する．

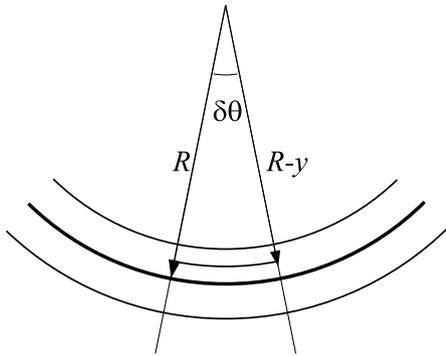


図 5: 棒の単純な曲げ

次に，断面に働く応力のモーメントを計算する．このモーメントは  $z$  成分だけが存在し

$$N_z = - \int t_{xx} y dy dz = \frac{Y}{R} \int y^2 dy dz \quad (82)$$

となる．右辺の積分

$$I_y = \int y^2 dy dz \quad (83)$$

は棒の断面の形状で決まり，断面二次モーメントと呼ばれている．

棒の断面が矩形 ( $y$  方向に  $h$ ， $z$  方向に  $w$ ) の場合，断面二次モーメントは

$$I_y = w \int_{-h/2}^{h/2} y dy = \frac{wh^3}{12} \quad (84)$$

である．

今，中心線が  $y = \xi(x)$  で与えられているとすると

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{[1 + \xi'(x)^2]^{3/2}} \frac{d^2 \xi}{dx^2} \quad (85)$$

<sup>5</sup>  $z$  方向の変位が無いので，重心を通り  $z$  軸に平行な線上でいつも伸縮応力がない．

と表される (下に凸の場合を正にとる)．ここで，

$$\xi'(x) = \frac{d\xi}{dx} \quad (86)$$

である．

また， $F_x$  が 0 でない場合には，棒の曲がりとは異なるが，中心線の曲率半径  $R$  を考えれば，曲げのモーメントは式 (82) が成り立つと考えてよい．その理由は， $F_x$  の断面に平行な成分はモーメントを持たないし，垂直な成分は，中心線を基準にモーメントを考えると断面内で様な成分は寄与がなくなるからである．この関係を，式 (77) や式 (78) に代入し， $\xi$  の満たす方程式を求める．

### 5.3 微小変形

棒の曲げは，与えられた条件のもとで  $\xi(x)$  を求めることに帰着される．棒の場合には，応力や歪みが微小でも，大きな変形が生じる．この大変形をきちんと扱うことは議論が難しいが，ここでは微小変形の領域を扱う，その場合， $|\xi'| \ll 1$  の条件が満たされるので

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 \xi}{dx^2} \quad (87)$$

と簡素化される．体積力は無視しよう．また，中心線の接線ベクトルは

$$\zeta = (1, \xi', 0) / \sqrt{1 + (\xi')^2} = (1, \xi', 0) \quad (88)$$

と考えてよいので，

$$I_y Y \frac{d^3 \xi}{dx^3} + F_y - \frac{d\xi}{dx} F_x = 0 \quad (89)$$

となる．

まず， $F_x = 0$  の場合

$$I_y Y \frac{d^3 \xi}{dx^3} + F_y = 0 \quad (90)$$

を考えよう．この式はすぐに積分できる．

$$\xi(x) = -\frac{F_y x^3}{6YI_y} + a + bx + cx^2 \quad (91)$$

となる． $a, b, c$  は積分定数であり，境界条件から決まる．

もし、 $y$  方向に様な重力が加わっている場合には ( $g$  を重力加速度とする)、棒の断面積を  $S$ 、密度を  $\rho$  として、

$$\frac{dF_y}{dx} = S\rho g \quad (92)$$

と式 (90) を連立して解く。重力の場合、棒の断面内で一様なので曲げモーメントは 0 なので、式 (76) の右辺は 0 である。

$$F_y = S\rho gx - d \quad (93)$$

なので、

$$\xi(x) = -\frac{S\rho gx^4}{24YI_y} + a + bx + cx^2 + dx^3/6 \quad (94)$$

#### 5.4 支持法と境界条件

棒の変形を解く場合の境界条件は、棒の支持法による。図 6 に示すように固定支持では、棒の端の位置と角度を固定してしまう。通常は、変形の無い時の棒の方向に固定するので、

$$\xi = 0, \quad \frac{d\xi}{dx} = 0 \quad (95)$$

である。また、単純支持と呼ばれる方法では、棒の位置だけを固定し、角度は自由に支持する。この場合、力のモーメントが 0 になるので、

$$\xi = 0, \quad \frac{d^2\xi}{dx^2} = 0 \quad (96)$$

となる。また、自由端の場合は、モーメントが 0 であり、応力も 0 であるから、

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3\xi}{dx^3} = 0 \quad (97)$$

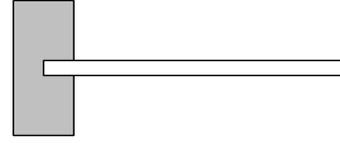
である。もし、自由端に  $y$  方向の力  $F$  が棒に加わっているばあいは、式 (90) の関係を満たすように、

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3\xi}{dx^3} = -\frac{F}{YI_y} \quad (98)$$

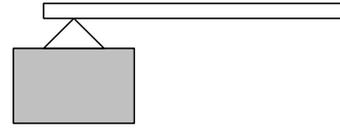
とならなければならない。

式 (91) の解に対して、 $x = 0$  で固定支持、 $x = L$  で力  $F$  が加わる自由端とすれば、 $a = b = 0$ 、 $c = FL/(2YI_y)$  であるから、

$$\xi(x) = \frac{Fx^2}{6YI_y}(3L - x) \quad (99)$$



(a)



(b)

図 6: 棒の支持方法。(a) 固定支持、(b) 単純支持。

となる。この時の  $x = L$  での変位量  $H_F$  は

$$H_F = \frac{FL^3}{3YI_y} \quad (100)$$

となる。

また、式 (94) の解に対して、 $x = 0$  で固定支持、 $x = L$  で自由端とすれば、 $a = b = 0$ 、 $d = S\rho gL/(YI_y)$ 、 $c = -S\rho gL^2/(4YI_y)$  であるから、

$$\xi(x) = -\frac{S\rho gx^2}{24YI_y}(x^2 - 4Lx + 6L^2) \quad (101)$$

であり、 $x = L$  での変位量  $H_g$  は

$$H_g = -\frac{S\rho gL^4}{8YI_y} \quad (102)$$

となる。

このように、片方の端を固定支持し、もう片方を自由端にした物を片持ち梁という。式 (84) を用いると、端に応力を加えた場合のたわみの量  $H_F$  は厚さ  $h$  の 3 乗に反比例するが、自重でのたわみ量  $H_g$  は  $h$  の 2 乗に反比例する。

#### 5.5 座屈

次は、 $x$  方向に応力がかかっている場合を考えよう。解くべき方程式は

$$I_y Y \frac{d^3\xi}{dx^3} - \frac{d\xi}{dx} F_x = 0 \quad (103)$$

である．この式は一度積分できる．

$$I_y Y \frac{d^2 \xi}{dx^2} - F_x \xi = c \quad (104)$$

である ( $c$  は任意定数)．ここで， $F_x > 0$  の場合 (張力)，解は  $\kappa = \sqrt{F_x / (Y I_y)}$  とすると

$$\xi(x) = A \cosh \kappa x + B \sinh \kappa x + C \quad (105)$$

となる． $x = 0$  で固定支持， $x = L$  で応力がかかった自由端とすると

$$\xi(0) = A + C = 0, \quad \xi'(0) = \kappa B = 0 \quad (106)$$

より  $B = 0$ ，また，

$$\xi''(L) = \kappa^2 A \cosh \kappa L = 0 \quad (107)$$

であるが， $\cosh \kappa L \neq 0$  なので  $A = 0 = C$  であり，全て 0 になってしまう．

では， $F_x < 0$  の場合を考える．このときは， $k = \sqrt{|F_x| / (Y I_y)}$  をもちいて，

$$\xi(x) = A \cos kx + B \sin kx + C \quad (108)$$

となる．前の例と同様に  $x = 0$  で固定支持， $x = L$  で応力がかかった自由端とすると

$$\xi(0) = A + C = 0, \quad \xi'(0) = kB = 0 \quad (109)$$

より  $B = 0$ ，また，

$$\xi''(L) = -k^2 A \cos kL = 0 \quad (110)$$

であるが，この場合には，

$$k = \frac{(2n+1)\pi}{2L} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (111)$$

の時， $A \neq 0$  の解が存在する (図 7)．これは，棒の長手方向の応力 (圧縮力) がある値に達すると， $\xi = 0$  以外の解が存在すること，つまり棒が曲がる可能性があることを示す．このように，方程式のパラメータによって解が 2 つ以上になりうる現象を解の分岐という．棒の場合，臨界を越えると曲がった方が安定になる．この現象を座屈という．座屈が起きる臨界の力は

$$F_c = \frac{\pi^2 Y I_y}{4L^2} \quad (112)$$

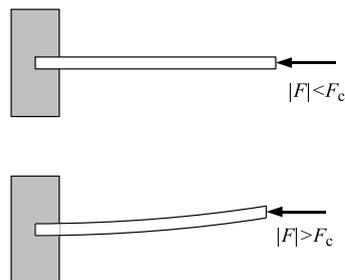


図 7: 座屈．固定支持-自由支持の場合．

である．

実際には， $F_x < -F_c$  の場合には，大きな変形が起きて，この微小変形の近似の領域をはずれるため，離散的な条件を満たさなくても棒の変形が起きる．また，臨界圧縮力は棒の支持方法に依存する．両端を単純支持の場合

$$F_c = \frac{\pi^2 Y I_y}{L^2} \quad (113)$$

となる．

## 6 弾性振動

これまでは，弾性体の変形の釣り合いを考えできた．ここからは，時間変化する場合を考えよう．基本の式は

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} + K_i \quad (114)$$

であるが，弾性変形の場合，歪みが小さいので

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \approx \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (115)$$

と考えてよい．等方弾性体を仮定すると，運動方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mathbf{K} \quad (116)$$

となる．

### 6.1 無限媒質中の平面波

まず，無限に広がる媒質中を伝わる変化を考える．今，変化は  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$  と， $x$  にしか依

存しないと仮定する．また，体積力は働かないとする．このとき  $u_x$  の方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \quad (117)$$

であり， $y$  と  $z$  成分に関しては

$$\rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} \quad (118)$$

となる．ここで， $\alpha$  は  $y$  か  $z$  を意味する．これらの方程式は

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (119)$$

の形に表すことができ，波動方程式と呼ばれる．式 (119) の一般解は波動現象を表し，

$$U(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (120)$$

で与えられることが知られている．ここで， $c$  は波の伝わる速さを表す．また，この波動は， $x$  が一定の平面内で振動の状態が同じであるので平面波と呼ばれる（または 1 次元の波動）．

等方弾性体の場合， $x$  方向に波が伝わることを仮定して議論したが， $u_x$  とそれ以外では，波の速さが異なる． $u_x$  は，波の進行方向に変位が存在するので縦波と呼ばれ， $u_y$  と  $u_z$  は，進行方向と振動方向が直交しているため横波と呼ばれる．縦波の伝わる速度は

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{Y(1 - \sigma)}{\rho(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}} \quad (121)$$

であるが，横波は

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{Y}{2\rho(1 + \sigma)}} \quad (122)$$

である． $-1 < \sigma < 1/2$  なので， $c_1 > c_t$  となる．地震が起きた時，縦波（P 波）の方が横波（S 波）より早く到達すると言われるのは，この性質の現れである．

## 6.2 一般の波動

縦波と横波の概念をもう少し一般的に扱うことにする．そこで，変位ベクトルを

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_t \quad (123)$$

のように 2 つの部分に分ける．ここで，2 つのベクトルは

$$\text{rot } \mathbf{u}_1 = 0, \quad \text{div } \mathbf{u}_t = 0 \quad (124)$$

を満たす．これを式 (116) に代入すると，

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} - c_1^2 \Delta \mathbf{u}_1 = 0 \quad (125)$$

となる．ここで， $\mathbf{u}_1$  に対しては

$$\text{grad div } \mathbf{u} = \text{rot rot } \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} \quad (126)$$

の公式を用いた．ここで，

$$\mathbf{U}_t = \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t \quad (127)$$

$$\mathbf{U}_1 = \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} - c_1^2 \Delta \mathbf{u}_1 \quad (128)$$

とすれば，

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{U}_1 = 0 \quad (129)$$

が常に成り立つが，定義から

$$\text{rot } \mathbf{U}_1 = 0, \quad \text{div } \mathbf{U}_t = 0 \quad (130)$$

である．また，式 (129) から，

$$\text{rot } \mathbf{U}_t = 0, \quad \text{div } \mathbf{U}_1 = 0 \quad (131)$$

である．あるベクトルの回転も発散も恒等的に 0 ならば，そのベクトルは定数ベクトルであり，境界条件を無限遠で 0 になるように決めると，0 ベクトルになる．すなわち， $\mathbf{U}_t = \mathbf{U}_1 = 0$  となる．このことから，

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} = c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t \quad (132)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = c_1^2 \Delta \mathbf{u}_1 \quad (133)$$

という 2 つの波動方程式が得られる．この  $\mathbf{u}_1$  が縦波成分， $\mathbf{u}_t$  が横波成分を表している．この定義は，前節で議論した平面波を含む一般的な縦波と横波の定義である．

## 6.3 棒の縦振動

ここでは，一様な棒の縦振動（長手方向の振動）を扱う．この変形は，一様な伸縮で議論し

たのと同様な議論が成り立つとしてみよう．長手方向を  $x$  軸にとる．このとき，

$$t_{xx} = Y \frac{\partial u_x}{\partial x}, t_{yy} = t_{zz} = t_{xy} = t_{yz} = t_{zx} = 0 \quad (134)$$

であるとする．このとき，運動方程式は， $u_x$  に関して

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} = Y \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \quad (135)$$

が得られる．この式から，棒の縦振動波の速さは

$$c_b = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (136)$$

で与えられることが分かる．この値は，純粋な縦波や横波の速さとは異なる．これは，ポアソン比が 0 でない場合，

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\sigma \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (137)$$

によって，横方向の変位が生じるためである．実際， $u_y$  と  $u_z$  に対しての運動方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0 \quad (138)$$

となるが，式 (137) とは矛盾する．したがって，静的な場合には成り立つ，式 (134) の条件は厳密には満たされない．ただ，この横方向の変位の大きさは棒の長さを  $L$ ，径を  $D$  とすれば，

$$\frac{u_y}{u_x} = \frac{u_z}{u_x} \approx \sigma \frac{D}{L} \quad (139)$$

となる．したがって，長さに比べて十分細い棒ならば，横方向の変位の影響は無視できるので，一様変形の条件が近似的に成り立つと考える．

式 (135) の解を， $u_x(t, x) = \sin(\omega t + \phi) f(x)$  と正弦振動を仮定して求めてみる．これを式 (135) に代入し  $f$  の満たす方程式にすれば

$$-\frac{\omega^2}{c_b^2} f = \frac{d^2 f}{dx^2} \quad (140)$$

なので， $k = \omega/c_b$  とすれば，

$$f(x) = A \cos kx + B \sin kx \quad (141)$$

である．境界条件は端面で応力の法線成分が 0 なので， $t_{xx} = 0$  である．この条件は  $t_{xx} \propto df/dx$

なので， $x = 0$  と  $x = L$  で  $df/dx = 0$  であればよい． $x = 0$  での条件から  $B = 0$ ， $x = L$  での条件から  $A \sin kL = 0$  である． $A = 0$  はもちろん解であるが，意味のない解であり， $A \neq 0$  の解を捜す必要がある．このときは，

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (142)$$

という離散化された値だけが許される．この  $k$  から振動数もきまり，

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} c_b \quad (143)$$

というたびとびの値が実現する．この振動数を固有振動数，この振動数を与えると決まる波の形を固有モードという．実際に，棒を自由に振動できるようにして，縦振動が起きるように力を加えると，この固有モードで振動が起きる．方程式が線形のため，一般解はこの固有モードの振動の重ね合わせで表される．

## 6.4 棒の曲げ振動

棒の曲げ振動に関しても，釣り合いの条件で議論した，式 (72) と式 (77) を用いる．振動では微小変形の場合で議論すれば十分であるので，力の方向は  $y$  方向のみで， $d/ds = \partial/\partial x$  とする．釣り合いの場合と異なるところは，せん断力の方程式が

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = S\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (144)$$

と運動方程式に置き換わる点である ( $S$  は棒の断面積)．モーメントの変化の式

$$YI_y \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + F_y = 0 \quad (145)$$

には，振動の効果は現れない (慣性力によるモーメントの影響は高次の効果となる)．この 2 つの式から，

$$YI_y \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} = -S\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (146)$$

という方程式が得られる．これが，棒の曲げ振動を表す方程式である．この方程式は，普通の波動方程式とは異なり， $x$  の 4 階微分を含む．

棒の縦振動の時と同様にして、正弦振動をする固有モードを見つけてみよう。そこで、 $\xi(t, x) = \sin(\omega t + \phi)X(x)$  とおくと、 $g$  の満たすべき方程式は、

$$YI_y \frac{d^4 X}{dx^4} = \omega^2 S \rho X \quad (147)$$

である。そこで、

$$\omega^2 = \frac{YI_y}{S\rho} k^4 \quad (148)$$

とすると

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - k^4 X = 0 \quad (149)$$

である。この線形方程式は4つの独立解の線形結合で表すことができるが、 $g = \exp \alpha t$  において代入すると、 $\alpha^4 = k^4$  である。したがって、 $\alpha = \pm k, \pm ik$  が解であるが、実数で表現すると

$$X(x) = A \cos kx + B \sin kx + C \cosh kx + D \sinh kx \quad (150)$$

となる。

境界条件を考えよう。 $x = 0$  で固定支持、 $x = L$  で自由端とする場合（片持ち梁の振動）を考える。 $X(0) = X'(0) = 0$  から、 $A + C = 0, B + D = 0$  である。また、 $X''(L) = X'''(L) = 0$  から、

$$-k^2[A(\cos kL + \cosh kL) + B(\sin kL + \sinh kL)] = 0 \quad (151)$$

$$-k^3[-A(\sin kL - \sinh kL) + B(\cos kL + \cosh kL)] = 0 \quad (152)$$

が得られるが、 $A = B = 0$  以外の解が得られるためには、

$$(\cos kL + \cosh kL)(\cos kL + \cosh kL) + (\sin kL + \sinh kL)(\sin kL - \sinh kL) = 0 \quad (153)$$

でなければならない。整理すると

$$\cos kL \cosh kL + 1 = 0 \quad (154)$$

である。この方程式から  $k$  が決まり、式 (148) から、固有振動数が決まる。式 (154) の解は数

値計算で解く。最小の解は  $kL = 1.8751 \dots$  である。

また、両端とも固定支持の場合は、

$$\cos kL \cosh kL - 1 = 0 \quad (155)$$

となる。この場合の最小の解は  $kL = 4.7300 \dots$  である。

## 7 内部摩擦・粘弾性・擬弾性

これまでの変形では、応力と歪みが完全に比例している場合を議論した。この場合、エネルギーは保存される。しかし、実際の変形ではエネルギーの散逸を伴う。このような性質は、内部摩擦と呼ばれる。内部摩擦には、応力を加えて歪みを増大させた後で、応力を減らして変形を元に戻すときの変化の状態が異なる（ヒステリシスを持つ）ことで発生する損失と時間変化する応力と歪みに位相差が生じることで発生する損失の2つに大別できる。前者は、準静的な変化でも損失が生じ静的ヒステリシス損失と呼ばれ、後者は動的な変化におけるヒステリシスによって生じるので、動的ヒステリシス損失と呼ばれる。前者は、線形の現象ではなく、その振る舞いは非常に複雑である。後者は、線形の系でも非線形の系でも生じる。線形の系は、純粋な弾性変形する要素と粘性抵抗を示す要素の組み合わせで表現できる。このような性質を粘弾性という。また、動的ヒステリシス損失には、応力と歪みの関係が、応力の時間微分を含むような関係で表される場合もあり、擬弾性と呼ばれている。ここでは、線形領域の議論で扱える範囲の動的ヒステリシスについて義論する。

### 7.1 複素コンプライアンスと複素弾性率

線形領域では、正弦波に対する応答を見ることが、系の性質を知る一番簡単な方法である。ここでは、単純化のため、歪みも応力も一つの方向に限り、単純化することにする。いま、応力を

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cos \omega t \quad (156)$$

で与える<sup>6</sup>。このとき、歪みは

$$s(t) = s_0 \cos(\omega t - \delta) \quad (157)$$

と異なる位相の正弦振動となる。また、 $s_0$  と  $\sigma_0$  は比例するので

$$s_0 = A(\omega)\sigma_0 \quad (158)$$

と書ける。もちろん、 $\delta$  も  $\omega$  の関数である。この関係は、

$$\sigma(t) = \sigma_0 \operatorname{Re}[\exp i\omega t] \quad (159)$$

$$s(t) = \sigma_0 \operatorname{Re}[\tilde{J}(\omega) \exp i\omega t] \quad (160)$$

と複素表現を用いて表すことができる。このとき、

$$\tilde{J}(\omega) = A(\omega) \exp[-i\delta(\omega)] \quad (161)$$

となる。この  $\tilde{J}$  は複素コンプライアンスと呼ばれている。また、この逆数  $1/\tilde{J} = \tilde{\kappa}$  は弾性率であり、複素弾性率と呼ばれる。例えば、一様な伸縮の場合、ヤング率を用いて  $\sigma = Ys$  と表すことができるが、これを

$$\sigma(t) = \operatorname{Re}[\tilde{Y}(\omega)s_0 \exp(i\omega t)] \quad (162)$$

のように正弦振動する場合の関係として表すことができ、 $\tilde{Y}$  は複素ヤング率となる。

この複素弾性率は、物質の性質に依存する量である。

## 7.2 クリープコンプライアンス

前節で述べた複素コンプライアンスは、正弦波に対する弾性体の応答を表す（周波数応答関数）である。この性質は、時間領域では過渡応答として表れる。この弾性体のインパルス応答関数を  $J(t)$  とすれば、歪みは

$$s(t) = \int_{-\infty}^t J(t-t')\sigma(t')dt' \quad (163)$$

<sup>6</sup>ここでは、応力を表すのに  $t$  を用いると時間変数と紛らわしいので、 $\sigma$  で表す。ポアソン比ではない。

で表すことができる。このインパルス応答関数と複素コンプライアンスは線形定常系では

$$J(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{J}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (164)$$

と逆フーリエ変換で表すことができる。実験では、インパルスではなくステップ応答を測定する場合が多い。このとき、 $\sigma(t) = \sigma_0 h(t)$  で与える。ここで、 $h(t)$  は単位階段関数で

$$h(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (165)$$

である。

これを与えると

$$\begin{aligned} s(t) &= \sigma_0 \int_0^t J(t-t') dt' \\ &= \sigma_0 \int_0^t J(t') dt' = \sigma_0 J_c(t) \end{aligned} \quad (166)$$

が得られる。この  $J_c$  をクリープコンプライアンスという。もし、応答が瞬間的に起きるならば、 $J(t) = \delta(t)/k$  というデルタ関数になるので、 $J_c = h(t)/k$  と歪みは階段関数になるが、例えば、応答が指数関数で減衰する場合、 $J(t) = \gamma \exp(-\gamma t) h(t)/k$  で表されるとすると、

$$J_c(t) = [1 - \exp(-\gamma t)] h(t)/k \quad (167)$$

とゆっくり歪が生じる。このような効果を弾性余効という。

## 7.3 マックスウエルモデルとフォークトモデル

粘弾性の性質を議論する場合、弾性体を図8に示す理想的なばねとダッシュポット（ダンパーともいい）の組み合わせでモデル化する。ダッシュポットとは、粘性を表現する要素で両端の速度差に比例する力が生じるものである。

この組み合わせの代表的なものは、図9のマックスウエルモデルとフォークトモデルである。マックスウエルモデルは、ばねとダッシュポットを直列につないだもので、ばねの片方は固定されているとする。このとき、力を加える

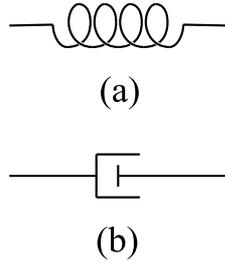


図 8: ばね (a) とダッシュポット (b) .

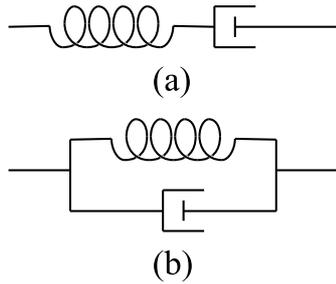


図 9: マックスウエルモデル (a) とフォークトモデル (b) .

点の変位を  $x$  , ばねとダッシュポットの結節点の変位を  $y$  とすれば ,

$$f = \Gamma(\dot{x} - \dot{y}) = ky \quad (168)$$

が成り立つ . これらの式から  $y$  を消去すると

$$f = \Gamma(\dot{x} - \dot{f}/k) \quad (169)$$

となる . この関係から , 複素コンプライアンスを求めると ,

$$\tilde{J} = \frac{1}{k} + \frac{1}{i\omega\Gamma} \quad (170)$$

であり , インパルス応答関数を求めると

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{2\pi} \int \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{i\omega\Gamma} \right) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{k} \delta(t) + \frac{1}{\Gamma} h(t) \end{aligned} \quad (171)$$

となる . この計算では ,  $J$  が因果律を満たす ( $t < 0$  で  $J = 0$ ) ように ,  $\omega = 0$  点の極を避けた . したがって , クリープコンプライアンスは ,

$$J_c(t) = \int_0^t J(t) dt = \left( \frac{1}{k} + \frac{t}{\Gamma} \right) h(t) \quad (172)$$

となり , 瞬間的に変位が起きる成分と時間と共に一様に変位する成分からなる . マックスウエルモデルは , 弾性体よりは粘性流体のモデルとして用いられる .

ばねとダッシュポットを並列につないだモデルはフォークトモデルと呼ばれる . この時の方程式は

$$f = kx + \Gamma\dot{x} \quad (173)$$

であり , 複素コンプライアンスは

$$\tilde{J} = \frac{1}{k + i\omega\Gamma} \quad (174)$$

であり , インパルス応答関数を求めると

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{k + i\omega\Gamma} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\Gamma} \exp(-kt/\Gamma) h(t) \end{aligned} \quad (175)$$

と指数関数になり , クリープコンプライアンスは ,

$$J_c(t) = \frac{1 - \exp(-kt/\Gamma)}{k} h(t) \quad (176)$$

と , 時間が経過すると一定値に近づく .

実際の粘弾性の性質は , ばねとダッシュポットを複数接続することで近似的に表すことができる . このときは , 全体を一つの複素ばねとして , その合成された複素ばね定数は , ばねの要素は  $k_i$  , ダッシュポットは  $i\omega\Gamma_i$  とし , 並列の場合は和を , 直列の場合は逆数の和の逆数を計算すればよい . 例として , 図 10 に示す 3 要素モデルというマックスウエルモデルとフォークトモデルの中間のようなモデルを作ると , その合成複素ばね定数は

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= k_0 + \frac{1}{1/k_1 + 1/(i\omega\Gamma_1)} \\ &= k_0 + \frac{i\omega\Gamma_1 k_1}{k_1 + i\omega\Gamma_1} \end{aligned} \quad (177)$$

となる . ここから , 複素コンプライアンスを計算すると

$$\tilde{J} = 1/\tilde{k} = \frac{k_1 + i\omega\Gamma_1}{k_0 k_1 + i\omega\Gamma_1(k_0 + k_1)} \quad (178)$$

となる . この虚部を見ると

$$J''(\omega) = \frac{\omega\Gamma_1 k_1^2}{(k_0 k_1)^2 + \omega^2 \Gamma_1^2 (k_0 + k_1)^2} \quad (179)$$

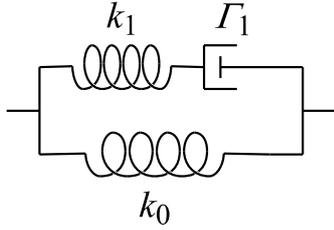


図 10: 3 要素モデル .

となり ,  $\omega = k_0 k_1 / [(k_0 + k_1) \Gamma_1] = 1/\tau$  でピークを持つことである . また , インパルス応答では ,

$$J(t) = \frac{\delta(t)}{k_0 + k_1} + \frac{k_1}{(k_0 + k_1) k_0 \tau} \exp(-t/\tau) h(t) \quad (180)$$

#### 7.4 内部摩擦

位相差  $\delta$  が存在すると , 応力と歪みが比例していないため , 応力は歪みに対して振動周期で平均しても仕事を行う . これは , 振動のエネルギーが散逸することを表している . この量を計算しよう . 弾性体の単位体積あたりで考え , 応力が歪みに対して行う仕事は

$$\delta w = \sigma \delta s \quad (181)$$

であるから , 1 周期で考えると

$$\begin{aligned} \Delta w &= \int_0^{2\pi/\omega} \sigma(t) \frac{ds(t)}{dt} dt \\ &= - \int_0^{2\pi/\omega} \sigma_0 \cos \omega t \omega s_0 \sin(\omega t - \delta) dt \\ &= \pi \sigma_0 s_0 \sin \delta \end{aligned} \quad (182)$$

このとき , 弾性体に蓄えられるエネルギーは

$$e = \frac{1}{2} \text{Re}[\tilde{\sigma}^* \tilde{s}] = \frac{s_0 \sigma_0}{2} \cos \delta \quad (183)$$

である<sup>7</sup> . そこで , 減衰能 ( 内部摩擦 ) を

$$\Xi = \frac{\Delta w}{2e} = \pi \tan \delta \quad (184)$$

と呼ぶ .  $\tan \delta$  は損失を表す指標としてよく用いられる .

<sup>7</sup>  $e = s_0 \sigma_0 / 2$  で定義する流儀もある .

内部摩擦が存在すると , 弾性体の固有振動は , 外力がない自由振動の場合 , 正弦振動ではなく , 減衰振動をする . ある固有モードの歪みの振動振幅が

$$s(t) = s_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega t + \phi) \quad (185)$$

で表される場合 , 隣り合った振動振幅の比の対数を対数減衰率  $\Delta$  といい ,

$$\Delta = \log \frac{s[(2n\pi - \phi)/\omega]}{s[(2(n-1)\pi - \phi)/\omega]} = 2\gamma\pi/\omega \quad (186)$$

で表される . また , 振動のエネルギーは

$$E \propto \frac{1}{2} s^2 = \frac{1}{2} s_0^2 \exp(-2\gamma t) \quad (187)$$

であるので , 1 周期でのエネルギーの減少は

$$\Delta E = \frac{1}{2} s_0^2 \exp(-2\gamma t) [1 - \exp(-4\gamma\pi/\omega)] \quad (188)$$

である . したがって , 内部摩擦は

$$\Xi = \frac{\Delta E}{2E} = \frac{1 - \exp(-4\gamma\pi/\omega)}{2} \approx 2\gamma\pi/\omega = \Delta \quad (189)$$

である .

## A 棒の曲げ : 大変形の場合

細いピアノ線などの変形は局所的な応力や歪は小さいが , 変形量は大きなものになる . この大きな変形を扱う場合には , 曲率半径などに厳密な式を用いる必要がある . そこで , まず , 中心線の  $x$  における接線と  $x$  軸のなす角を  $\phi$  とする . このとき

$$\tan \phi = \xi'(x) \quad (190)$$

であり , また , 接線ベクトルは

$$\zeta = (\cos \phi, \sin \phi, 0) \quad (191)$$

で表される . 式 (190) の両辺を  $x$  で微分すると

$$\frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{d\phi}{dx} = \frac{d^2 \xi}{dx^2} \quad (192)$$

また、曲線の長さ  $ds = \sqrt{1 + \xi'(x)^2} dx$  と  $\cos \phi = \sqrt{1/(1 + \tan^2 \phi)} = \sqrt{1/[1 + \xi'(x)^2]}$  を利用すると

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{[1 + \xi'(x)^2]^{3/2}} \frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{1}{R} \quad (193)$$

となる。この関係を式 (82) と式 (78) に代入すると

$$YI_y \frac{d^2\phi}{ds^2} + \cos \phi F_y - \sin \phi F_x = 0 \quad (194)$$

が得られる。このような扱いをオイラーのエラスチカ理論という。

座屈を扱ったときのように、 $F_x = -F$  ( $F > 0$ )、 $F_y = 0$  とすれば、

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\sin \phi F \quad (195)$$

と単振り子の運動方程式と同じ方程式が得られる。両辺に  $d\phi/ds$  をかけて積分すると

$$\frac{YI_y}{2} \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 - \cos \phi F = c \quad (196)$$

が得られる。境界条件として、 $s = 0$  の端を固定支持とすると、 $s = 0$  で  $\phi = 0$  である。また、 $s = L$  で自由端とすると、 $d\phi/ds = 0$  である（曲率半径は無限大になる）。 $s = L$  に対応する角度を  $\phi_0$  とすると  $c = -F \cos \phi_0$  となる。これにしたがって

$$s = \sqrt{\frac{YI_y}{2F}} \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}} \quad (197)$$

となる。この積分は初等関数では表せない。また、 $\phi_0$  は

$$L = \sqrt{\frac{YI_y}{2F}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}} \quad (198)$$

で決まる。変形が微小な場合、 $\phi < \phi_0 \ll 1$  の時には、

$$\cos \phi = 1 - \phi^2/2 + \phi^4/24 \quad (199)$$

と近似し、 $\eta = \phi/\phi_0$  とすれば、

$$\sqrt{\frac{F}{YI_y}} L = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1 - \eta^2)[1 - \phi_0^2(1 + \eta^2)/12]}} \quad (200)$$

となる。右辺は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)[1 - \phi_0^2(1 + \eta^2)/12]}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)}} [1 + \phi_0^2(1 + \eta^2)/24] \end{aligned} \quad (201)$$

と近似し、さらに、 $\eta = \sin \theta$  とすると

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{F}{YI_y}} L &= \int_0^{\pi/2} d\theta [1 + \phi_0^2(1 + \sin^2 \theta)/24] \\ &= \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{\phi_0^2}{16} \right) \end{aligned} \quad (202)$$

という関係となる。式 (112) の臨界圧縮力を用いると

$$\sqrt{\frac{F}{F_c}} = 1 + \frac{\phi_0^2}{16} \quad (203)$$

である。したがって、 $F > F_c$  でなければ解が存在しないことがわかる。実際の曲線の形は、 $\cos \phi = dx/ds$ 、 $\sin \phi = dy/ds$  という関係を用い、

$$\begin{aligned} x &= \int_0^\phi \cos \phi \frac{ds}{d\phi} d\phi \\ &= \sqrt{\frac{YI_y}{2F}} \int_0^\phi \frac{\cos \phi d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}} \end{aligned} \quad (204)$$

$$\begin{aligned} y &= \int_0^\phi \sin \phi \frac{ds}{d\phi} d\phi \\ &= \sqrt{\frac{YI_y}{2F}} \int_0^\phi \frac{\sin \phi d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}} \\ &= \sqrt{\frac{2YI_y}{F}} (\sqrt{1 - \cos \phi_0} - \sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}) \end{aligned} \quad (205)$$

となる。端の点の横方向の変位は  $H = y(\phi_0)$  で与えられるが、

$$H = \sqrt{\frac{2YI_y}{F}} \sqrt{1 - \cos \phi_0} \quad (206)$$

であり、微小変形の範囲では

$$H = \sqrt{\frac{YI_y}{F}} \phi_0 = \frac{8L}{\pi} \sqrt{\frac{F_c}{F}} \sqrt{\sqrt{\frac{F}{F_c}} - 1} \quad (207)$$

で与えられる。

一般の場合には、数値積分して解を求めることが可能である。

## B 棒のねじれ

次は、一様な棒のねじれを考える。長さ  $L$  の棒を  $z$  軸が中心軸と一致するように置く。 $z = 0$  では変位がなく、 $z = L$  では、 $\Theta$  回転しているとする。ある  $z$  一定の面内での回転角は、 $\theta = \Theta z/L$  で与えられ、その面内では剛体的な回転による変位ベクトルが存在する。すなわち、

$$u_x = -\theta y = -\frac{yz\Theta}{L} \quad (208)$$

$$u_y = \theta x = \frac{xz\Theta}{L} \quad (209)$$

である。さらに、ねじれでは体積変化を伴わないと考えられるので、

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (210)$$

である。ここで、式 (208) と式 (209) を用いた。したがって、 $u_z$  は  $x$  と  $y$  だけの関数である。上記の変位ベクトルからひずみテンソルの成分を計算すると

$$s_{xx} = s_{yy} = s_{zz} = 0, s_{xy} = 0 \quad (211)$$

であり、

$$s_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{y\Theta}{L} \right) \quad (212)$$

$$s_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{x\Theta}{L} \right) \quad (213)$$

である。したがって、応力テンソルに関しても

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = 0, t_{xy} = 0 \quad (214)$$

であり、

$$t_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{y\Theta}{L} \right) \quad (215)$$

$$t_{zy} = \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{x\Theta}{L} \right) \quad (216)$$

である。応力の釣り合いの方程式に代入すると、

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0 \quad (217)$$

である。この条件から、 $u_z$  は、2次元の調和関数であることが分かる。あとは、境界条件を満たすように  $u_z$  を決めればよい。ところで、2次

元の調和関数は、 $\eta = x + iy$  を引数とする複素解析関数  $f(\eta)$  の実部または虚部の関数によって表される。そこで、 $f(\eta) = \phi + i\psi$  と置き、

$$u_z = \frac{\Theta}{L} \phi \quad (218)$$

とすれば、

$$t_{zx} = \mu \frac{\Theta}{L} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right) \quad (219)$$

$$t_{zy} = \mu \frac{\Theta}{L} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right) \quad (220)$$

となる。また、解析関数の性質である、コーシー・リーマンの関係

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (221)$$

を用いると

$$t_{zx} = \mu \frac{\Theta}{L} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right) \quad (222)$$

$$t_{zy} = \mu \frac{\Theta}{L} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} + x \right)$$

と書ける。そこで、 $\chi = \psi/2 - (x^2 + y^2)/4$  とすれば、

$$t_{zx} = 2\mu \frac{\Theta}{L} \frac{\partial \chi}{\partial y} \quad (223)$$

$$t_{zy} = -2\mu \frac{\Theta}{L} \frac{\partial \chi}{\partial x}$$

と表すことができ、また、

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = -1 \quad (224)$$

を満たす。

境界条件は、棒の表面の法線ベクトルを  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, 0)$  とすると、

$$t_{zx}n_x + t_{zy}n_y = 0 \quad (225)$$

であるが、 $z$  一定の面で切った時の断面の周囲を表す曲線を  $(x(s), y(s))$  で表すと、法線ベクトルとこの曲線の接線ベクトル  $(dx/ds, dy/ds)$  は直交するので、

$$n_x = \frac{dy}{ds}, \quad n_y = -\frac{dx}{ds} \quad (226)$$

と表すことができる．式 (225) に，式 (223) と式 (226) を代入すると，

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\chi}{ds} = 0 \quad (227)$$

となることが分かる．つまり， $\chi$  は，領域内で式 (224) を満たし，境界線上で一定の値を持つ関数である．この  $\chi$  を見つけることができれば，棒の捻れの問題は解けたことになる．

一番簡単な例は，円形断面の場合である．このときは

$$\chi = -\frac{1}{4}(x^2 + y^2) + c \quad (228)$$

とすればよい ( $c$  は定数)．この式から， $\psi = 2c$  であり， $\phi = a$  という定数なので， $u_z$  も定数である．したがって， $z$  方向には一様な平行移動であるから， $u_z = 0$  と同じことになる．では，楕円の場合はどうか，楕円の軸が  $x$  軸と  $y$  軸上にあり，それぞれ， $2a$  と  $2b$  であるとする．この場合，

$$\chi = A(x^2 - y^2) - \frac{1}{4}(x^2 + y^2) + c \quad (229)$$

と置いて，境界で一定値をとるように  $A$  を決める．境界上の点は， $x = a \cos \varphi$ ， $y = b \sin \varphi$  と，パラメータ  $\varphi$  を用いて表すことが可能である．これを式 (229) に代入すると，

$$\begin{aligned} \chi &= A(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)/4 + c \\ &= A(a^2 \cos^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi) \\ &\quad - (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)/4 + c \quad (230) \\ &= [A(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)/4] \cos^2 \varphi \\ &\quad - (A + 1/4)b^2 + c \end{aligned}$$

であるから，

$$A = \frac{a^2 - b^2}{4(a^2 + b^2)} \quad (231)$$

とすればよいことがわかる．このとき，

$$\psi = 2A(x^2 - y^2) = 2A \operatorname{Im}[i\eta^2] \quad (232)$$

なので，

$$\phi = 2A \operatorname{Re}[i\eta^2] = -4Axy \quad (233)$$

である．したがって，

$$u_z = -\frac{\Theta}{L} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy \quad (234)$$

となるので，断面内の  $z$  方向の変位は一様ではない．等変位を表す線は直交双曲線となる．

## B.1 面内応力によるモーメント

断面内で応力のモーメントを計算すると，

$$N_z = \int (-yt_{zx} + xt_{yz}) dS \quad (235)$$

で与えられる． $\chi$  を用いると

$$N_z = -2\mu \frac{\Theta}{L} \int (y \frac{\partial \chi}{\partial y} + x \frac{\partial \chi}{\partial x}) dS \quad (236)$$

であるが，部分積分すれば

$$\int y \frac{\partial \chi}{\partial y} dS = - \oint \chi y dx - \int \chi dS \quad (237)$$

$$\int x \frac{\partial \chi}{\partial x} dS = \oint \chi x dy - \int \chi dS \quad (238)$$

となる<sup>8</sup>．2つの式で線積分の前の符号が異なるのは，境界上での周回積分の回る向きを同じ向きにとっているからである．境界上では  $\chi$  が定数であることを用いると

$$- \oint \chi y dx = \oint \chi x dy = \chi_0 S \quad (239)$$

である．ここで， $\chi_0$  は境界上の値， $S$  は棒の断面積である．これを用いると，

$$\begin{aligned} N_z &= -2\mu \frac{\Theta}{L} \left[ \oint (-y\chi dx + x\chi dy) - 2 \int \chi dS \right] \\ &= 4\mu \frac{\Theta}{L} \left( \int \chi dS - \chi_0 S \right) \quad (240) \end{aligned}$$

で与えられる．ここで，境界条件として  $\chi_0 = 0$  を課せば，

$$N_z = 4\mu \frac{\Theta}{L} \int \chi dS \quad (241)$$

となる．この力のモーメントと単位長さ当たりの回転角  $\Theta/L$  の比を捻れ剛性と呼び，

$$C = 4\mu \int \chi dS \quad (242)$$

<sup>8</sup>棒の断面は単連結であるとする．穴のあいている場合は考えない．

で表す．半径  $a$  の円形の棒の場合，

$$C = 2\pi\mu \int_0^a (a^2 - r^2)rdr = \pi\mu a^4/2 \quad (243)$$

である．