『変形体の力学』講義資料 No.1【連続体と運動方程式】

1　変形体・連続体

通常の物体は，大きさを持ち，運動によって形を変える場合が多い．固体と呼ばれる状態にある物体は，外力が無ければ一定の形を保っているが，液体や気体は，自分自身が固有の形を持っているわけではなく，容器に入れればその容器を隙間無く満たす．これは，液体や気体は，極めて小さな力によって大きな変形が生じることを意味しており，流体と呼ばれる．固体の場合は，外力を加えると変形するが，変形が小さい時は，力を加えるのを止めると変形がなくなり，元に戻る．このような性質を弾性という．

物体が運動により形を変えるという意味で，これらの物体は変形体と呼ばれる．これに対して，全く変形しない物体を剛体と呼ぶ．剛体は，変形しないという性質のため，重心の位置とそのまわりの回転の 6 個の自由度で運動を表すことができるが，変形体ではそのような簡素化はできない．

1.1　連続体の概念

質点の力学では，質量 m の質点の位置を $\mathbf{r}$ とし，力 $\mathbf{F}$ が働く時，運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F} \tag{1}$$

を解くことを議論する．複数の質点が集まった質点系では i 番目の質点の質量，位置，働く力を m_i，$\mathbf{r}_i$，$\mathbf{F}_i$ とすると，

$$m_i\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}_i \tag{2}$$

という連立の運動方程式を解くことになる．現実の物体は，大きさを持っているのでその運動を議論する場合には，物体を質点の集まりと考え，運動を議論する．実際の物質は，原子から構成されているので，その原子 1 個を今考えた質点 1 個に対応させれば，通常の物体では，アボガドロ数程度の原子が含まれているので，極めて多くの運動方程式を連立して解く必要があることになり，現実的な方法ではない．そこで，巨視的な平均を用いて，物体を構成するものが連続的に分布していると考えることにする．このような考え方を連続体という．

例えば，質量分布を表す密度は，図 1 に示すように，ある点 $\mathbf{r}$ の周りの微小な体積 ΔV の領域 $\Delta\mathcal{V}$ 中に含まれる質量 Δm に対して

$$\rho(\mathbf{r},\, t) = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i\in\Delta\mathcal{V}} m_i \tag{3}$$

で定義すると，$\Delta\mathcal{V}$ を適当な大きさにとれば，$\rho(\mathbf{r},\, t)$ は場所と時間の連続関数と考えることができる．このように適当な大きさの領域での平均値を考えると，様々な物理量を連続的な量として扱うことが可能になる．この場合には，物体の変位は元々の物体の各点毎に異なる．また，先ほど述べた密度以外にも圧力や温度などの物理量も物体の位置と時間の関数となる．これは，連続体の運動を扱う場合には，場の概念を用いる必要があることを意味している．

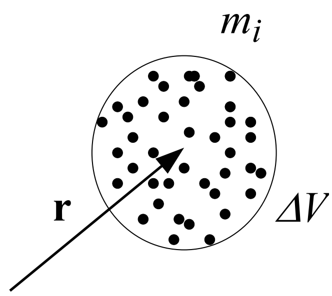

図 1: 質量密度の定義

2　連続体に働く力

まず，連続体に働く力を考えることにする．連続体の 1 点 $\mathbf{r} = (x,\, y,\, z)$ と $\mathbf{r} + \mathrm{d}\mathbf{r} = (x + \mathrm{d}x,\, y + \mathrm{d}y,\, z + \mathrm{d}z)$ で指定される微小直方体 ABCDEFGH を考え，この部分に働く力を考

える（図 2）．この時，力を体積に比例する力（体積力）と境界面を通して働く力（応力）の 2 つに分けて考える．

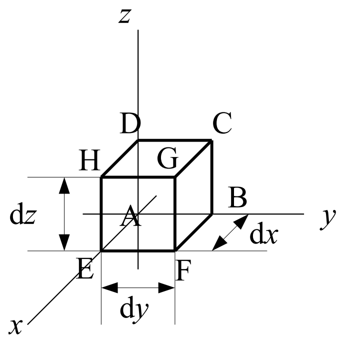

図 2: 微小体積に働く力

2.1　体積力

体積力は，連続体を構成する物質に直接働く力であり，重力や電磁気力のような力が想定されている．この力が微小直方体に働く場合，直方体の体積 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ を用いて，

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_\mathrm{V} = \mathbf{K}\mathrm{d}V \tag{4}$$

と書ける．つまり，$\mathbf{K}$ は単位体積あたりに働く力である．一様な重力場では，連続体の密度 ρ と重力加速度ベクトル $\mathbf{g}$ を用いて，

$$\mathbf{K} = \rho\mathbf{g} \tag{5}$$

と書ける．また，保存力の場合には，単位質量あたりの位置エネルギー Λ を用いて，

$$\mathbf{K} = -\rho\,\mathrm{grad}\,\Lambda \tag{6}$$

と書ける．

2.2　応力

連続体の場合，連続体を構成する要素の間で働く力を考える必要がある．この力は，着目している領域の境界を通して働く．先ほどの微小直方体では，6 個の面が存在するが，それぞれの面を通して力が働く．この力は，境界面の面積に比例するので，単位面積当たりに働く力で表したものが応力である．応力は面の法線に平行な成分（法線と同じ向きの時を正とする）と直交する（したがって，面に平行な）成分の力に分解して考えることができる．面に垂直な成分は，正の場合，張力で負の場合は圧力を表す．また，面に平行な成分の力はせん断（ずり）変形を引き起こす力となり，せん断応力と呼ばれている．

先ほどの，微小直方体の x 軸に垂直な面（EFGH 面）を考えると，この面に働く力は，

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'_x = &[t_{xx}(x+\mathrm{d}x,\,y,\,z)\mathbf{e}_x + t_{yx}(x+\mathrm{d}x,\,y,\,z)\mathbf{e}_y \\ &+ t_{zx}(x+\mathrm{d}x,\,y,\,z)\mathbf{e}_z]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{7}$$

となる（図 3）．ここで，t_{ij} は j 軸に垂直な単位面積に働く力の第 i 成分である．

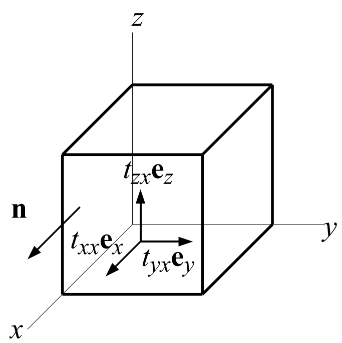

図 3: 面に働く応力

同様に ABCD 面を考えると

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_x = &-[t_{xx}(x,\,y,\,z)\mathbf{e}_x + t_{yx}(x,\,y,\,z)\mathbf{e}_y \\ &+ t_{zx}(x,\,y,\,z)\mathbf{e}_z]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{8}$$

と書ける．ここで，$-$ の符号は，面の法線ベクトルが x 軸の負の方向を向いていることによる．そして，x 軸に垂直な 2 つの面から受ける力の合計は

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{F}_x &= \mathbf{F}'_x + \mathbf{F}_x \\ &= \left(\frac{\partial t_{xx}}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial t_{yx}}{\partial x}\mathbf{e}_y + \frac{\partial t_{zx}}{\partial x}\mathbf{e}_z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{9}$$

となる，残りの面についても計算すると

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_y = \left(\frac{\partial t_{xy}}{\partial y}\mathbf{e}_x + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial t_{zy}}{\partial y}\mathbf{e}_z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{10}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_z = \left(\frac{\partial t_{xz}}{\partial z}\mathbf{e}_x + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z}\mathbf{e}_y + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z}\mathbf{e}_z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{11}$$

となる．全ての面からの寄与を計算すると

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \sum_{i,\,j=1}^{3} \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}\mathbf{e}_i \mathrm{d}V \tag{12}$$

と書ける．ここで，i と j は $1,2,3$ の値をとる添え字で，$x_1 = x$，$x_2 = y$，$x_3 = z$，$t_{11} = t_{xx}$，$t_{12} = t_{xy}$，$t_{13} = t_{xz}$ などの意味である．この式は，応力により，単位体積あたり，

$$\tilde{\mathbf{f}} = \sum_{i,\,j=1}^{3} \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}\mathbf{e}_i \tag{13}$$

の力が働くことを示す．ここで，表れた t_{ij} という量は応力を特徴付ける量で応力テンソルと呼ばれ，j 軸に垂直な面に働く単位面積当たりの力の i 成分を表す．

式 (13) をある領域 $\mathcal{V}$ で積分すると，応力によりその領域に働く力 $\mathbf{F}_{\mathrm{stress}}$ が得られるが，その i 成分は

$$(F_{\mathrm{stress}})_i = \int_{\mathcal{V}} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}\mathrm{d}V \tag{14}$$

であるが，ガウスの発散定理を用いると領域を囲む閉曲面 $\mathcal{S}$ 上の面積分で計算できる．この面の法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とすれば

$$(F_{\mathrm{stress}})_i = \int_{\mathcal{S}} \sum_{j=1}^{3} t_{ij} n_j \mathrm{d}S \tag{15}$$

と書くことができる．このことは，応力が境界面に働く力であることを表していると共に，法線ベクトル $\mathbf{n}$ で指定される一般の方向を向いた面での単位面積当たりに働く力の i 成分は

$$f_i = \sum_{j=1}^{3} t_{ij} n_j \tag{16}$$

で与えられることを示す．

2.3　テンソルの縮約と簡略表示

上記の計算では，応力テンソルと法線ベクトルの積を計算した時，同じ添え字 j を用いて 1 から 3 まで加える操作を行った．このように，ベクトルやテンソルの成分の積を作り，ある添え字に対して全ての成分で和を作る操作を縮約という．このとき，和を計算するための添え字はダミー指標と呼ばれる．このような形式は頻繁に現れるので，式の中に同じ添え字が表れた場合にはその添え字に関しては縮約するという約束をして，和の記号を省略するやり方がある．例えば，

$$\sum_{j=1}^{3} t_{ij} n_j \to t_{ij} n_j$$

という意味である．また，微分記号も同じで

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \to \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}$$

と書くのである．今後はこの書き方を用いる[1]．

ベクトルの内積は，2 つのベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の成分の積から作られるテンソル $A_i B_j$ の対角和の計算なので

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_i B_i \tag{17}$$

と書く．また，外積は，3 次元の完全反対称テンソル

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ijk = 123,\,231,\,312 \\ -1 & ijk = 132,\,321,\,213 \\ 0 & \text{others} \end{cases} \tag{18}$$

を用いると

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \tag{19}$$

と書ける．この式では，j と k がダミー指標である．

[1]テンソルの対角成分の和を跡（トレース）というが

$$\sum_{i=1}^{3} t_{ii} \to t_{ii}$$

と書く．しかし，個別の対角要素（t_{xx}，t_{yy}，t_{zz}）のどれかを表す場合と紛らわしい．そこで，個別の要素を表す場合はそのたびに，t_{xx} または t_{11} のように指定することにする．

2.4　応力のモーメント

大きさを持った物体の運動では，働く力とそのモーメントが重要である．応力によるモーメント $\mathbf{N}_{\mathrm{stress}}$ は式 (13) を用いると，

$$(N_{\mathrm{stress}})_i = \varepsilon_{ijk} \int_{\mathcal{V}} x_j \frac{\partial t_{kl}}{\partial x_l} \mathrm{d}V \tag{20}$$

となる．ところで，

$$\frac{\partial (x_j t_{kl})}{\partial x_l} = t_{kj} + x_j \frac{\partial t_{kl}}{\partial x_l} \tag{21}$$

となるから，

$$(N_{\mathrm{stress}})_i = \varepsilon_{ijk} \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial (x_j t_{kl})}{\partial x_l} - t_{kj} \right) \mathrm{d}V \tag{22}$$

と書ける．さらに，被積分関数の第 1 項は，ガウスの定理で表面積分に変換できて

$$(N_{\mathrm{stress}})_i = \varepsilon_{ijk} \int_{\mathcal{S}} x_j t_{kl} n_l \mathrm{d}S - \varepsilon_{ijk} \int_{\mathcal{V}} t_{kj} \mathrm{d}V \tag{23}$$

となる．この式の第 1 項はこの領域の表面に加わる応力のモーメントである．応力の性質を考えると境界を通して働く力で全てが書き表される必要がある．そのため，第 2 項は 0 でなければならない．これは $\varepsilon_{ijk} t_{kj} = 0$ であり，$t_{kj} = t_{jk}$ が成り立つことを意味する．すなわち，応力テンソルは対称テンソルでなければならない．上記の議論を逆にたどると，応力テンソルが対称であると，ある点を指定したときの局所的な応力のモーメントは 0 となる．

3　連続体の運動

連続体を微小な領域に分けて，それぞれの領域の運動を考えることで，全体の運動を考えることができる．このような微小領域を一つの粒子のように考え，構成粒子と呼ぶことにする（流体の場合には流体粒子と呼ばれている）．この構成粒子の位置を $\mathbf{r} = (x,\, y,\, z)$ で表す．この連続体の密度を ρ，体積を $\mathrm{d}V$ とすると，通常のニュートンの運動方程式

$$\rho \mathrm{d}V \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} = \left(K_i + \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \right) \mathrm{d}V \tag{24}$$

が成り立つ．両辺を $\mathrm{d}V$ で割れば

$$\rho \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} = K_i + \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \tag{25}$$

が得られる．このような考え方で運動を議論する方法をラグランジュの方法という（図 4）．このとき，連続体中の構成粒子を区別するためには，$t = 0$ で粒子が存在していた位置 $\mathbf{r}_0 = (a,\, b,\, c)$ を用いる．このため，独立変数は，時間 t と $\mathbf{r}_0$ であり，これらの関数として，$\mathbf{r}(t,\, \mathbf{r}_0)$ を求めることになる．

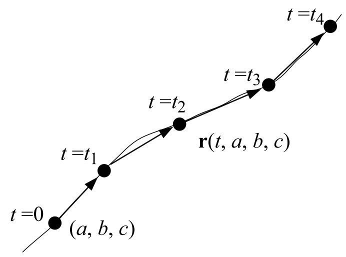

図 4: ラグランジュの方法

もう一つの考え方は，$(x,\, y,\, z)$ の関数として，連続体の運動を規定する量，たとえば，速度 $\mathbf{v}$ を考えるというやり方である．この場合，速度は $\mathbf{v}(x,\, y,\, z,\, t)$ と場所と時間の関数となる．この速度ベクトルは，空間の各点にベクトルが与えられていることを意味していて，電磁気学で表れる電場ベクトルと同様にベクトル場と呼ばれるものになる．このような描像によって連続体の運動を記述する方法をオイラーの方法という．オイラーの方法では独立変数は，t と $\mathbf{r} = (x, y, z)$の空間座標となる．

ラグランジュの方法とオイラーの方法は，同じ運動を表すので等価な関係を与えるはずであるが形式的にはかなり異なる．固体の変形では，構成粒子の移動量が小さいためラグランジュの方法とオイラーの方法で差がでない（後述する）．流体を扱う場合には，オイラーの方法が広い範囲で用いられている．

3.1　オイラー微分とラグランジュ微分

オイラーの方法で連続体の運動を扱う場合に，微分の計算で注意すべき点がある．先ほど述べ

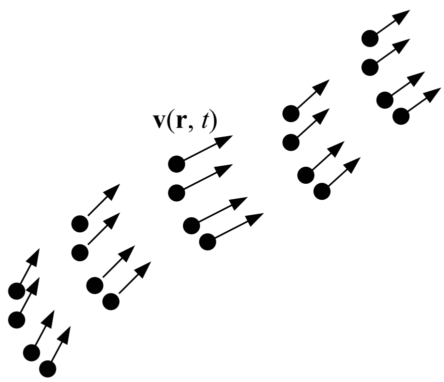

図 5: オイラーの方法

たように，この方法では独立変数は，t と $\mathbf{r}$ である．そのため，これらの変数による微分は通常の偏微分の規則に従う．ある物理量 $F(t, \mathbf{r})$ の時間変化を考えるとき

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{F(t+\delta t, \mathbf{r}) - F(t, \mathbf{r})}{\delta t} \tag{26}$$

で計算する．このような微分をオイラー微分という．しかし，物理量の変化を注目している構成粒子の運動に沿って計算する必要がある場合がある．この場合，構成粒子の位置の時間変化による物理量の変化も考えなければならないので，

$$\Delta_{\mathrm{L}} F = F(t+\delta t, \mathbf{r}+\mathbf{v}\delta t) - F(t, \mathbf{r}) \tag{27}$$

を F の δt の間の変化量として考える．ここでは，粒子の位置が δt の間に $\mathbf{v}\delta t$ だけ変化することを用いた．この変化量から計算した微分を

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t} &= \lim_{\delta t \to 0} \frac{\Delta_{\mathrm{L}} F}{\delta t} = \frac{\partial F}{\partial t} + v_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} F \end{aligned} \tag{28}$$

と表し，ラグランジュ微分と呼ぶ．

ニュートンの運動方程式は質点の位置を時間の関数として求め，エネルギーなどの物理量に関して，粒子の運動に沿った変化が大事な役割を果たしている．ラグランジュの方法で連続体の運動を記述することは，ニュートンの運動方程式をそのまま連続体に拡張している形式である．ところが，オイラーの方法では空間変数を独立変数と考えるので，物理量も時間と空間の関数となるが，連続体の運動に沿った変化が重要となる場合が多く，そのような場合の変化は，ラグランジュ微分を用いて計算する必要がある．

例として，$F = x$ の場合を考えてみる．このとき，オイラー微分は

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0 \tag{29}$$

であるが，ラグランジュ微分は

$$\frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial x}{\partial t} + v_x \frac{\partial x}{\partial x} + v_y \frac{\partial x}{\partial y} + v_z \frac{\partial x}{\partial z} = v_x \tag{30}$$

と構成粒子の速度ベクトルの x 成分が得られることが分かる．

4 連続の式

連続体の運動では，変形にしたがって連続体を構成する物質が移動するが，今，考えている範囲では質量が保存するはずである．この保存則を扱ってみよう．

4.1 ラグランジュの連続の式

まず，ラグランジュの方法で考えて見よう．図 6 に示すように $t = 0$ である領域を考える．この領域（$\mathcal{V}_0$）内に含まれる質量 M は，このときの密度を ρ_0 とすると

$$M = \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \mathrm{d}a \mathrm{d}b \mathrm{d}c \tag{31}$$

と表される．この領域が時間 t 経過して，領域 $\mathcal{V}$ に変化したとする．質量が保存されるので，この時の密度を ρ とすると

$$M = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \tag{32}$$

である．ところで，構成粒子の位置は $\mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0)$ と，運動方程式の解として与えられる．これを $\mathbf{r}_0 \to \mathbf{r}$ の変数変換と考えれば，変数変換のヤコビアン

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} \tag{33}$$

を用いて

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{V}_0} \rho \frac{\partial(x,\,y,\,z)}{\partial(a,\,b,\,c)} \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c = \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c \tag{34}$$

となる．したがって，

$$\rho \frac{\partial(x,\,y,\,z)}{\partial(a,\,b,\,c)} = \rho_0 \tag{35}$$

が成り立つ．この式をラグランジュの連続の式という．

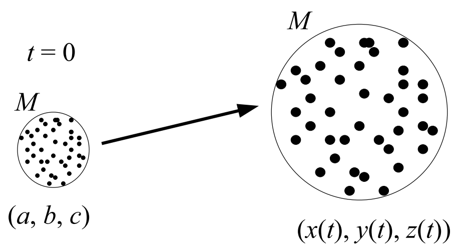

図 6: ラグランジュの方法での連続の式

4.2 オイラーの連続の式

同じ質量の保存則をオイラーの方法で扱ってみよう．やはりある領域 $\mathcal{V}$ を考える（図 7）．この領域に含まれる質量は

$$M = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathrm{d}V \quad (\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z) \tag{36}$$

である．この量の変化を考える．オイラーの方法の場合，領域自身は変化しない．その内部に含まれる質量は，連続体の運動によって出入りしたと考える．ある時間間隔 δt の間に，この領域に流れ込む質量は，境界を表す閉曲面 $\mathcal{S}$ 上の面積分で表すことができる．この量を計算しよう．その面の法線ベクトルを $\mathbf{n}$，微小面積要素を $\mathrm{d}S$ とする．構成粒子の面に向かう速さが $-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ なので，これに δt を掛けた長さを高さ，$\mathrm{d}S$ を底面に持つ立体の体積に含まれる質量が δt の間に $\mathrm{d}S$ を通って流れ込む．これを全表面で積分すると

$$\delta M = -\int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \mathrm{d}S \delta t \tag{37}$$

である．したがって，

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \mathrm{d}S \tag{38}$$

である．また，式 (36) の両辺を時間微分すると

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V \tag{39}$$

である．この関係から

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V = -\int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \mathrm{d}S = -\int_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\,(\rho \mathbf{v}) \mathrm{d}V \tag{40}$$

となる．右辺の変形にはガウスの定理を用いた．この関係は任意の領域で成り立つ．したがって，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{41}$$

が成り立つ．これをオイラーの連続の式という．

ラグランジュの方法では，積分の領域自身が構成粒子の運動にしたがって変化するのに対して，オイラーの方法では領域を固定して，その内部の物質量の変化を議論していることに注意したい．

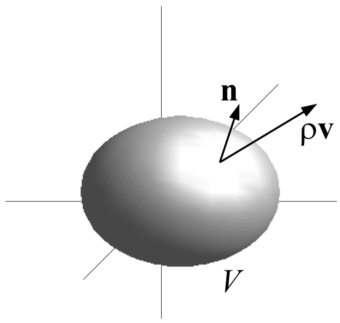

図 7: オイラーの方法での連続の式

5 運動方程式

連続体の運動をラグランジュの方法で扱う場合は，ニュートンの運動方程式を連続体に適用できるような形式にして議論した．ここでは，オイラーの方法によって運動方程式を求めてみる．もちろん，基本になるのは，ニュートンの

運動方程式であるが，ここでは，運動量の変化率と働く力が等しいという関係で議論をする．連続の式を議論した時と同じように，ある領域 $\mathcal{V}$ を考える．この領域内の連続体の持つ運動量 $\mathbf{P}$ の i 成分は

$$P_i = \int_{\mathcal{V}} \rho v_i \mathrm{d}V \tag{42}$$

である．この量の変化は，オイラーの方法で考えると

1. 体積力と応力の和が働くこと
2. 境界から内部に運動量を持った構成粒子が流入すること

によって生じる．力については式 (25) の右辺と同じ力が単位体積あたりに働く．運動量の流入に関しては，連続の式の計算で行ったのと同じように考える．法線ベクトル $\mathbf{n}$ を持つ微小面積要素 $\mathrm{d}S$ を δt の間に通過する構成粒子の持つ運動量は $-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\delta t\mathrm{d}S(\rho\mathbf{v})$ であるから，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t} =& \int_{\mathcal{V}} \left(K_i + \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}V \\ &- \int_{\mathcal{S}} \rho v_i v_j n_j \mathrm{d}S\end{aligned} \tag{43}$$

となる．右辺の第 2 項はガウスの定理を用いると

$$\int_{\mathcal{S}} \rho v_i v_j n_j \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j}\mathrm{d}V \tag{44}$$

である．また，式 (42) の両辺を時間微分すると

$$\frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}\mathrm{d}V \tag{45}$$

であるから，整理すると

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}\mathrm{d}V =& \int_{\mathcal{V}} \left(K_i + \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}V \\ &- \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j}\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{46}$$

となる．この関係は任意の積分領域で成り立つので

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = K_i + \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} \tag{47}$$

が成り立つ．ところで

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} \\ &= \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} + \rho v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ &= \rho\frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t} + v_i\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})\right) \\ &= \rho\frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t}\end{aligned} \tag{48}$$

となる．最後の変形は連続の式を用いた．ここから，運動方程式は

$$\rho\frac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t} = K_i + \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \tag{49}$$

と書くことができる．この式は，式 (25) と似ているが，変数 $\mathbf{r}$ の意味が異なる．この式では，$\mathbf{r}$ は独立変数であるが，式 (25) では構成粒子の運動を表す変数で解くべき従属変数となっている．また，左辺の加速度に関係する項では，速度のラグランジュ微分で与えられていることから，構成粒子の運動に沿った加速度が運動法則に表れるということであり，ニュートンの法則にしたがっていることが分かる．しかし，ラグランジュ微分は，速度に関して非線形な演算であることを忘れてはならない．式 (25) の右辺の微分が従属変数による微分になっていることと併せて，その違いを認識しておく必要がある．

実際に，この運動方程式を解く場合には，応力テンソルと体積力を与える必要がある．応力テンソルの性質は，考えている連続体の性質に依存するので，固体・液体・気体など個別の問題となる．