「変形体の力学」第 2 回 演習問題 解答例

1.

アルミの棒の長さを L，半径を a とし，おもりによる力を $F = mg$ とすると，単位面積あたりに加わる力は $F/(\pi a^2)$ である．したがってこの圧縮による長さ方向の変形 δL は,

$$\begin{aligned} Y\frac{\delta L}{L} &= \frac{F}{\pi a^2} \qquad (1)\\ \therefore\quad \delta L &= \frac{FL}{\pi a^2 Y}\\ &= \frac{mgL}{\pi a^2 Y}\\ &= 1.8\times 10^{-7}\ \ \mathrm{m} \end{aligned}$$

となる．半径の変形 δa は,

$$\begin{aligned} \frac{\delta a}{a} &= \sigma\frac{\delta L}{L} \qquad (2)\\ \therefore\quad \delta a &= \sigma\frac{\delta L}{L}a\\ &= 3.1\times 10^{-9}\ \ \mathrm{m} \end{aligned}$$

となる．

2.

棒の長手方向を x 軸にとり，棒の両端の x 座標をそれぞれ $x = 0, L$ とすると，

$$\begin{aligned} t_{xx} &= Y\frac{\partial u_x}{\partial x}, \qquad (3)\\ t_{yy} &= t_{zz} = t_{xy} = t_{yz} = t_{zx} = 0 \end{aligned}$$

となる．このとき，u_x に関する運動方程式は,

$$\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} \qquad (4)$$

となる．式 (3)，(4) より，

$$\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = Y\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \qquad (5)$$

が得られる．式 (5) の解を，

$$u_x(t,x) = \sin(\omega t + \phi) f(x) \qquad (6)$$

と正弦振動を仮定して求める．これを式 (5) に代入すると，

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\rho}{Y}\omega^2 f \qquad (7)$$

なので，$k = \sqrt{\rho/Y}\omega$ とおくと，

$$f(x) = A\cos kx + B\sin kx \qquad (8)$$

となる．境界条件は，端面での応力の法線成分が 0 なので，$f'(0) = f'(L) = 0$ である．$f'(0) = 0$ より，$B = 0$．$f'(L) = 0$ より，$A\sin kL = 0$．$A = B = 0$ 以外の解を考えるので，

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, 3, ...) \qquad (9)$$

となる．この k_n から固有振動数が決まり，

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{2\pi}\omega_n\\ &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Y}{\rho}}k_n\\ &= \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (n = 1, 2, 3, ...) \qquad (10) \end{aligned}$$

となる．これより，最低の固有振動数は $n = 1$ のときで，

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{Y}{\rho}}\\ &= 2.5\times 10^4\ \ \mathrm{Hz} \end{aligned}$$

と求まる．

3.

$$\begin{aligned} I &= \iint y^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= \iint (r\cos\theta)^2\ r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\ \int_0^a r^3\mathrm{d}r\\ &= \pi\times\frac{a^4}{4}\\ &= \frac{\pi a^4}{4} \qquad (11) \end{aligned}$$

4.

微小変形における微小区間のモーメントのつりあいの式

$$IY\frac{\mathrm{d}^3\xi}{\mathrm{d}x^3} + F_y - \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}F_x = 0 \tag{12}$$

を考える．この問題では $F_x = 0, F_y = mg$ である．したがって，式 (12) の一般解は，

$$\xi(x) = -\frac{mg}{6IY}x^3 + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \tag{13}$$

となる．次に境界条件を考える．両端の x 座標を，固定支持の側を $x = 0$，おもりの側を $x = L$ とすると，

$$\xi(0) = 0 \tag{14}$$

$$\xi'(0) = 0 \tag{15}$$

$$\xi''(L) = 0 \tag{16}$$

が境界条件となる．式 (14) より $c_0 = 0$，式 (15) より $c_1 = 0$，式 (16) より $c_2 = mgL/2IY$ が得られ，

$$\xi(x) = -\frac{mg}{6IY}x^3 + \frac{mgL}{2IY}x^2 \tag{17}$$

を得る．したがって，棒の端の変位量は，

$$\begin{aligned}
\xi(L) &= -\frac{mg}{6IY}L^3 + \frac{mg}{2IY}L^3 \\
&= \frac{mgL^3}{3IY} \\
&= \frac{4mgL^3}{3\pi a^4 Y} \qquad \left(\because I = \frac{\pi a^4}{4}\right) \\
&= 9.5 \times 10^{-5} \ \ \mathrm{m}
\end{aligned}$$

となる．