「変形体の力学」第 1 回 演習問題 解答例

問題 1

各面の面積を $\delta S_p (p = 0, 1, 2, 3)$ と書くと，力の i 方向のつりあいの式は，

$$\tilde{f}_i \delta S_0 - t_{ij} \delta S_j = 0 \tag{1}$$

である．ここで，面 $\delta \mathcal{S}_j (j = 1, 2, 3)$ はそれぞれ，面 $\delta \mathcal{S}_0$ を yz 面，zx 面，xy 面へ射影したものである．したがって，

$$\begin{aligned} \delta S_j &= (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_j) \delta S_0 \\ &= n_j \delta S_0 \end{aligned}$$

である．これを式 (1) に代入すれば

$$\tilde{f}_i = t_{ij} n_j$$

を得る．

体積力 K_i を考えた場合，三角錐が小さいとすると，つりあいの式は

$$\tilde{f}_i \delta S_0 - t_{ij} \delta S_j + \frac{abc}{6} K_i = 0$$

となる．ここで体積 0 の極限を考えるため，

$$a = \varepsilon\alpha, \quad b = \varepsilon\beta, \quad c = \varepsilon\gamma$$

とおいて $\varepsilon \to 0$ を考える．このとき三角錐にはたらく力は，応力項が $O(\varepsilon^2)$ であり，体積力項は $O(\varepsilon^3)$ である．したがって体積力は高次の微小量であり，無視できる．

問題 2

各面で z 軸周りにトルクを生じさせるような力は，

$$\begin{aligned} &x \text{ 軸に垂直な面} + \text{側} : t_{yx} bc \; \boldsymbol{e}_y \\ &x \text{ 軸に垂直な面} - \text{側} : -t_{yx} bc \; \boldsymbol{e}_y \\ &y \text{ 軸に垂直な面} + \text{側} : t_{xy} ac \; \boldsymbol{e}_x \\ &y \text{ 軸に垂直な面} - \text{側} : -t_{xy} ac \; \boldsymbol{e}_x \\ &z \text{ 軸に垂直な面} + \text{側} : \boldsymbol{0} \\ &z \text{ 軸に垂直な面} - \text{側} : \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

である．向きと軸からの距離を考え，トルクのつりあいの式をたてると，

$$\begin{aligned} t_{yx} abc - t_{xy} abc = 0 \\ \therefore \quad t_{yx} = t_{xy} \end{aligned}$$

となる．

体積力について考える．体積力によるトルク T_K は，

$$T_K = \iiint (x K_y(\boldsymbol{r}) - y K_x(\boldsymbol{r})) \mathrm{d}V$$

である．ここで体積力を原点のまわりで展開し，一次のみを考えると，

$$K_i(\boldsymbol{r}) = K_i(\boldsymbol{0}) + \left. \frac{\partial K_i}{\partial x_j} \right|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}} x_j$$

である．積分を計算すると，

$$T_K = \frac{a^3 bc}{12} \left. \frac{\partial K_y}{\partial x} \right|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}} + \frac{ab^3 c}{12} \left. \frac{\partial K_x}{\partial y} \right|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}}$$

である．すなわち $T_K = O(\varepsilon^5)$ である．一方，応力によるトルクは上述のように $O(\varepsilon^3)$ なので，$\varepsilon \to 0$ では応力のみ考えればよい．

問題 3

ラグランジュの連続の式

$$\rho(t, \boldsymbol{r}(t)) \; \frac{\partial(x(t), y(t), z(t))}{\partial(a, b, c)} = \rho_0$$

について，$t = 0$ から微小時間 δt だけ経過したときを考える．この場合，上式は，

$$\rho(\delta t, \boldsymbol{r}(\delta t)) \; \frac{\partial(x(\delta t), y(\delta t), z(\delta t))}{\partial(a, b, c)} = \rho_0 \tag{2}$$

である．一次の微小量までを考えることにすると，

$$\begin{aligned} \rho(\delta t, \boldsymbol{r}(\delta t)) &= \rho_0 + \frac{\mathrm{D}\rho(t)}{\mathrm{D}t} \delta t \\ &= \rho_0 + \delta t \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

であり，また，

$$\frac{\partial(x(\delta t), y(\delta t), z(\delta t))}{\partial(a,b,c)} = \det\left(\delta_{ij} + \delta t \frac{\partial v_i}{\partial a_j}\right)$$
$$= 1 + \delta t \frac{\partial v_i}{\partial a_i}$$

となる（det((単位行列)+(微小行列))）．これらを式 (2) に代入すると，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial a_i} = 0$$

となる（二次の微小量を無視した）．また，$x_i(0) = a_i$ なので

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a_i}(\rho v_i) = 0$$

である．ここで a_i は時間によらない座標であり，オイラーの方法での座標に等しい．したがって，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

を得る．