『振動計測の物理と重力波検出』

1　計測の物理

計測技術を極限まで追求してみるとどうなるかを考えてみる。今、振り子を考えよう。質量 1kg のおもりを長さ 25cm の糸で吊るすと、周期が 1 秒の振り子ができる。これは、まさに人間のスケールの物理的な対象であり、古典力学が成り立つ。運動方程式は散逸項を入れると

$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+{\omega_0}^2x\right)=0\quad\left({\omega_0}^2=\frac{g}{\ell}\right)\tag{1}$$

という式になる。この式の解は減衰振動となるので、放置すれば最終的には静止するはずであるが、そうはならない。それは揺らぎが存在するためである。

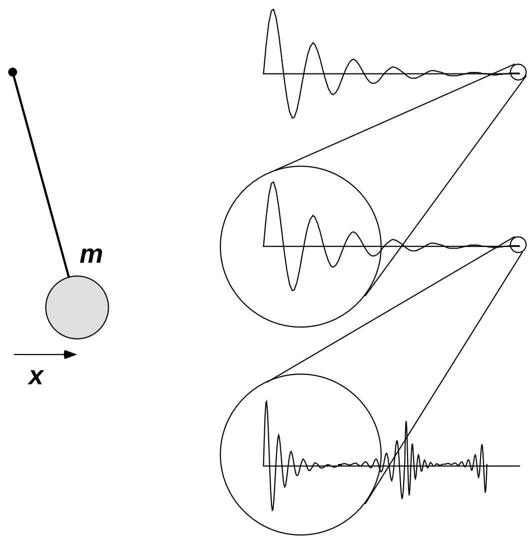

図 1: 振り子の振動と揺らぎ

自然界に存在する揺らぎでは

1. 熱揺らぎ
2. 量子揺らぎ

が代表的な物である。

熱揺らぎは、力学系が熱浴と接しているために起きるもので、いわゆるブラウン運動である。統計力学を使うとエネルギーの等分配則から

$$\frac{1}{2}m<v^2>=\frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T\tag{2}$$

が成り立つ。ここで、T は温度で、k_{B} はボルツマン定数 (1.38×10^{-23}J/K) で、$<v^2>={\omega_0}^2<x^2>$ であるから、

$$<x^2>=\frac{k_{\mathrm{B}}T}{m{\omega_0}^2}\tag{3}$$

と書き表すことができる。常温 ($T=300$K) とすると、

$$\sqrt{< x^2 >} = 1 \times 10^{-11}\,\mathrm{m} \tag{4}$$

となる。地面の常微動は数 μm と言われているので、5 桁も小さな値となる。しかし、環境を整備し、計測装置の感度が十分あれば、巨視的な物体の熱揺らぎを見ることができる。本来、統計力学の考え方はミクロな対象の集まりを巨視系と考え、その集合平均を考えることで、巨視的な、つまり、人間のスケールの現象を説明してきた。しかし、今、考えているのは 1 つ自由度の力学系であり、このような系の揺らぎは、通常は無視できるくらい小さい。しかし、検出器の感度を上げると十分に観測できる量である。

2 力学系の量子限界

さらに、感度を上げると今度は量子力学の基本原理の一つである不確定性原理によって決まる揺らぎまで到達する。不確定性原理によれば、物体の位置 x と運動量 p は同時に任意の精度で測定することは不可能で、

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \;\; (\hbar = \frac{h}{2\pi}) \tag{5}$$

という関係を満たさなければならない。実際に、もし、検出器の感度が十分高くなるとこのレベルの振動を捉えることは不可能ではなくなる可能性もある。その時は、量子力学が純粋な巨視系に適用できるかどうかの議論が必要となうだろう。

また、不確定原理に抵触しないで、正準共役な物理量のどちらか一方のみを任意の精度で連続的に測定する、量子非破壊測定法（Quantum Non-Demolition Measurement）の理論的な枠組みが提唱されている。

2.1 自由質点の量子限界

質量 m の自由質点の運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{m}, \;\; \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{6}$$

で表され、その解は

$$x(t) = \frac{p(0)}{m}t + x(0), \;\; p(t) = p(0) \tag{7}$$

で与えられる。そこで、不確定性関係

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{8}$$

を用いて、$t=\tau$ での x の不確定性を計算する。今、

$$\Delta x(\tau) = \frac{\Delta p(0)}{m}\tau + \Delta x(0) \tag{9}$$

だから、

$$\begin{aligned} \langle \Delta x(\tau)^2 \rangle &= \frac{\langle \Delta p(0)^2 \rangle}{m^2}\tau^2 + \langle \Delta x(0)^2 \rangle \\ &\geq 2 \sqrt{\frac{\langle \Delta p(0)^2 \rangle}{m^2}\tau^2 \langle \Delta x(0)^2 \rangle} \geq \frac{\hbar \tau}{m} \end{aligned} \tag{10}$$

である。等号は

$$\Delta x(0) = \Delta x_{\mathrm{SQL}} = \sqrt{\frac{\hbar\tau}{2m}} \tag{11}$$

の時に成り立ち、自由質点の標準量子限界 (standard quantum limit, SQL) と呼ばれている。これを見ると、単純な測定では、最初の x に対する測定で引き起こされる Δp の影響で、次の測定時の Δx が大きくなることが分かる。

しかし、p については

$$\langle \Delta p(\tau)^2 \rangle = \langle \Delta p(0)^2 \rangle \tag{12}$$

となり、一定の値を取るので、過去の測定の影響を受けないで、常に p を正確に測定できる。

2.2　調和振動子の量子限界

質量 m で共振周波数 $\omega_0/2\pi$ の調和振動子の運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{m}, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -m{\omega_0}^2 x \tag{13}$$

で、その解は、

$$x(t) = x(0)\cos\omega_0 t + \frac{p(0)}{m\omega_0}\sin\omega_0 t \tag{14}$$

$$p(t) = p(0)\cos\omega_0 t - m\omega_0 x(0)\sin\omega_0 t \tag{15}$$

で表される。この振動子の全エネルギーは、不確定性関係を用いると

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m{\omega_0}^2 x^2}{2} \geq \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{m{\omega_0}^2(\Delta x)^2}{2} \geq \frac{\hbar\omega_0}{2} \tag{16}$$

のように、0 でない最小値を持つ。古典力学的な最小エネルギーは 0 であるが、この状態は変位も運動量も 0 でなければならないので、不確定性関係の反するため許されない。調和振動子の最小エネルギー状態は不確定性関係を満たすように常に振動した状態にあるため、この最小エネルギーは零点振動エネルギーと呼ばれている[1]。

また、等号は

$$\Delta x = \Delta x_{\mathrm{SQL}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \tag{18}$$

のとき成り立ち、調和振動子の標準量子限界と呼ばれる。前節で議論した振り子の数値を代入してみると

$$\Delta x_{\mathrm{SQL}} = 2.9 \times 10^{-18}\,\mathrm{m} \tag{19}$$

となる。この程度の感度の検出器は、近い将来、実現される可能性が十分ある。

また、調和振動子では、$t = \tau$ での x の不確定性は

$$\Delta x(\tau) = \Delta x(0)\cos\omega_0\tau + \frac{\Delta p(0)}{m\omega_0}\sin\omega_0\tau \tag{20}$$

だから、

$$\langle \Delta x(\tau)^2 \rangle = \langle \Delta x(0)^2 \rangle \cos^2\omega_0\tau + \frac{\langle \Delta p(0)^2 \rangle}{m^2{\omega_0}^2}\sin^2\omega_0\tau \tag{21}$$

である。もし、$\omega_0\tau = n\pi$ $(n = 1, 2, 3..)$ なら、

$$\langle \Delta x(\tau)^2 \rangle = \langle \Delta x(0)^2 \rangle \tag{22}$$

となり、過去の測定の影響を受けないで測定ができる。このような測定はストロボスコピックな測定 (stroboscopic measurement) と呼ばれている。

[1] 調和振動子の状態を量子力学に従って計算すると許されるエネルギーは離散的で

$$E_n = \hbar\omega_0(n + \frac{1}{2}) \ \ (n = 0, 1, 2...) \tag{17}$$

であることが示されている。

3　振動測定の極限ー重力波の検出

このような議論は、元々、重力波を捉える試みの中で、考えられてきた。

アインシュタインにより作られた一般相対性理論は、相対論的な重力の理論である。そして、重力が相対論の要請を満たすということは、重力の影響も光速度を越えて伝わることができないことを暗示している。これは、重力が波動として伝播することを意味していて、重力波と呼ばれる。

実際に、一般相対性理論で重力の振る舞いを決定するアインシュタイン方程式に対して、弱い重力場の近似をすると、電磁場のマックスウエル方程式に極めて良く似た波動方程式が得られる。ただ、その源となるのは電荷ではなく質量である。電荷が加速度運動すると電磁波が放出されるのと同じようにして、質量が加速度運動をすると重力波が放出される。

重力波の存在は、天体現象の観測から確かめられている。連星中性子星の軌道パラメータの変化から、重力波の放出エネルギーを計算すると、理論的な予測と非常に良く一致することが分かっている[2]。

3.1　重力波の検出

天文学的な観測でその存在を疑う余地はないが、直接地上の検出器で重力波をとらえた例は、今のところない[3]。それは前に述べたように重力相互作用が極端に弱いためである。そのため、重力波の影響は非常に小さく、それを検出するためのには、極めて高度な技術が要求される。

さて、実際にそれを捉えるにためにはどうすればよいか。電磁波と異なり、重力波は潮汐力として表れる。その振幅を h とすると、L だけ離れた点の距離を

$$\Delta L = \frac{1}{2} h L \tag{23}$$

だけ変化させる。また、その方向と 90 度ずれた方向では、伸び縮みの位相が反転している（図 2）。この

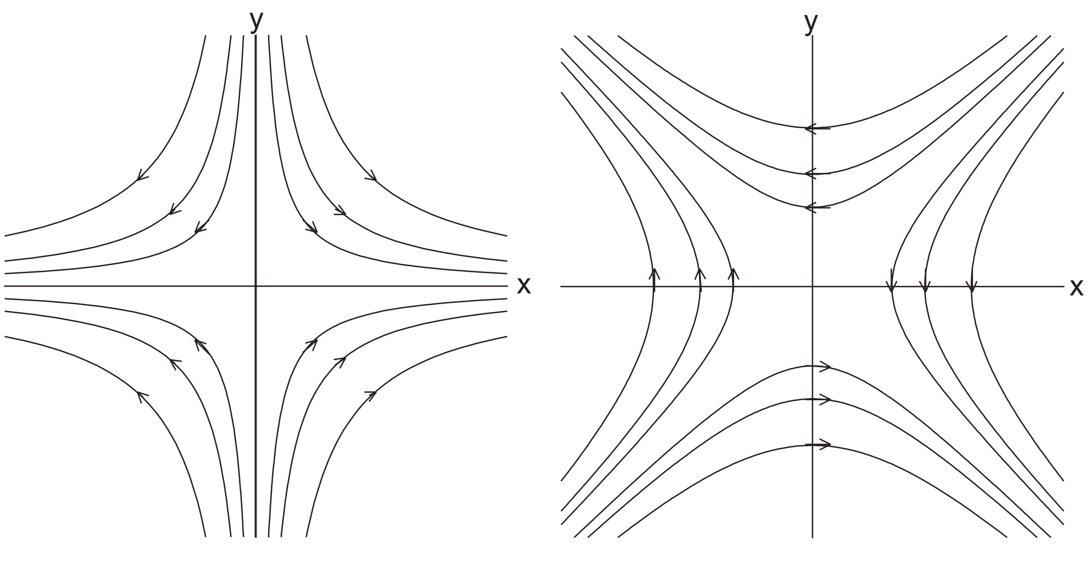

図 2: 重力波の力線

[2]1993 年度のノーベル賞はこの連星中性子星の発見者たちに与えられた。
[3]1969 年に米国のウエーバーが検出に成功したという報告を出したが、今では間違いであったと考えられている。

性質を利用して、検出器を構成するのである。

しかし、地上の質量を幾ら振り回してみても、h の値は極めて小さな値にしかならない。むしろ、星が吹く飛んでしまうような激しい天体現象に期待した方が検出の可能性が高い。といっても、期待できる h の大きさは 10^{-21} 以下であろうと言われている。もし、太陽と地球の距離を $L = 1.5 \times 10^{11}\mathrm{m}$ とすると、$\Delta L = 1.5 \times 10^{-10}\mathrm{m}$ でボーア半径の約 3 倍である。つまり、太陽と地球の間の距離が水素原子の大きさくらい変化するのをとらえる必要がある。これまでに様々な検出法が考案され、研究・開発が続けられている図 3)。

もし、2 つの重りをバネでつないでおくと、重力波の影響でバネが引き伸ばされ、振動を始める。もし、重力波の変化の周期が、バネと重りで決まる固有振動の周期に一致していれば大きな振動が得られるだろう。これが、共振型検出器の原理である。実際にはバネと重りの代わりに弾性体の固有振動を利用する（図 3の上段)。最新の装置では、熱揺らぎを避けるため、1 トン以上の金属の塊（アルミ合金が多い）を極低温（100mK 以下）に冷やして観測する装置が開発されている。これまでに得られている感度は $h \sim 10^{-19}$ である。

最近、急に感度が向上してきた方法は、レーザー干渉計を使って直接、空間の伸び縮みをはかる干渉計型検出器である。現在、進められている大型の干渉計計画では 3 から 4km 離れた点の直交した 2 方向の長さの変化を検出する装置が考えれている（図 3の中段)。

図 3の一番下は、宇宙空間を飛行する飛翔体の追跡を行うための、地球との間のマイクロ波の回線を利用し、電磁波が伝播する間の位相の変化を読み取ることで重力波の存在を確認しようとするものである。また、遥かかなたから非常に正確なパルスを送ってくる天体、パルサー（高速で回転する中性子星）のパルスのタイミングの揺らぎの測定から重力波の存在を探そうとする試みもある。

3.2 レーザー干渉計型重力波検出器

重力波の検出計画で、現在最も期待されて、活発に研究されている方法は、レーザー干渉計を使う方法である。米国ではカリフォルニア工科大学とマサチューセッツ工科大学の共同プロジェクトで LIGO と呼ばれる計画が 1992 年よりスタートしている。これは、アメリカの西海岸と東海岸に腕の長さが 4km ある干渉計を 1 台ずつ建設する計画である。また、ヨーロッパでは、フランスとイタリアの国際協力で、VIRGO という計画が始まっており、イタリアのピサの近くに 3km の干渉計を作る計画である。また、英国とドイツの共同プロジェクトで GEO というプロジェクトもあり、これは 600m の干渉計をドイツに建設中である。

日本では国立天文台の敷地内に、300m の干渉計を建設している。この計画は TAMA という名前で呼ばれている。国立天文台、東大（理、工、宇宙線研)、高エネルギー物理学研究所、電通大レーザーセンター、京大などの共同のプロジェクトである。

これらの干渉計では、高出力で非常に安定度の高いレーザー、超低損失で高精度の鏡、外乱振動を極限的に除去する防振装置、非常に大きな体積を安定で汚染の無い真空に保つ技術など、様々な分野で頂点を極める技術が必要とされている。そして、この装置は、人類が未だかつて経験したことがない極めて小さな変位を測定する装置である。そのために必要な技術は、光学技術、電子技術、機械技術、真空技術、どれをとっても極限的な要求を満たさなければならない。最先端の工学技術が支える極めて基礎の物理学実験装置である。

これら大型装置は、数年の内に稼動し始めるだろう。そして、人類が初めて重力波を捉える日がやってくると期待している。そして、それは、今までには得られなかった、未知の天体現象の謎を解く鍵をもたらすものであり、まったく新しい天文学の創成とも言えるのである。

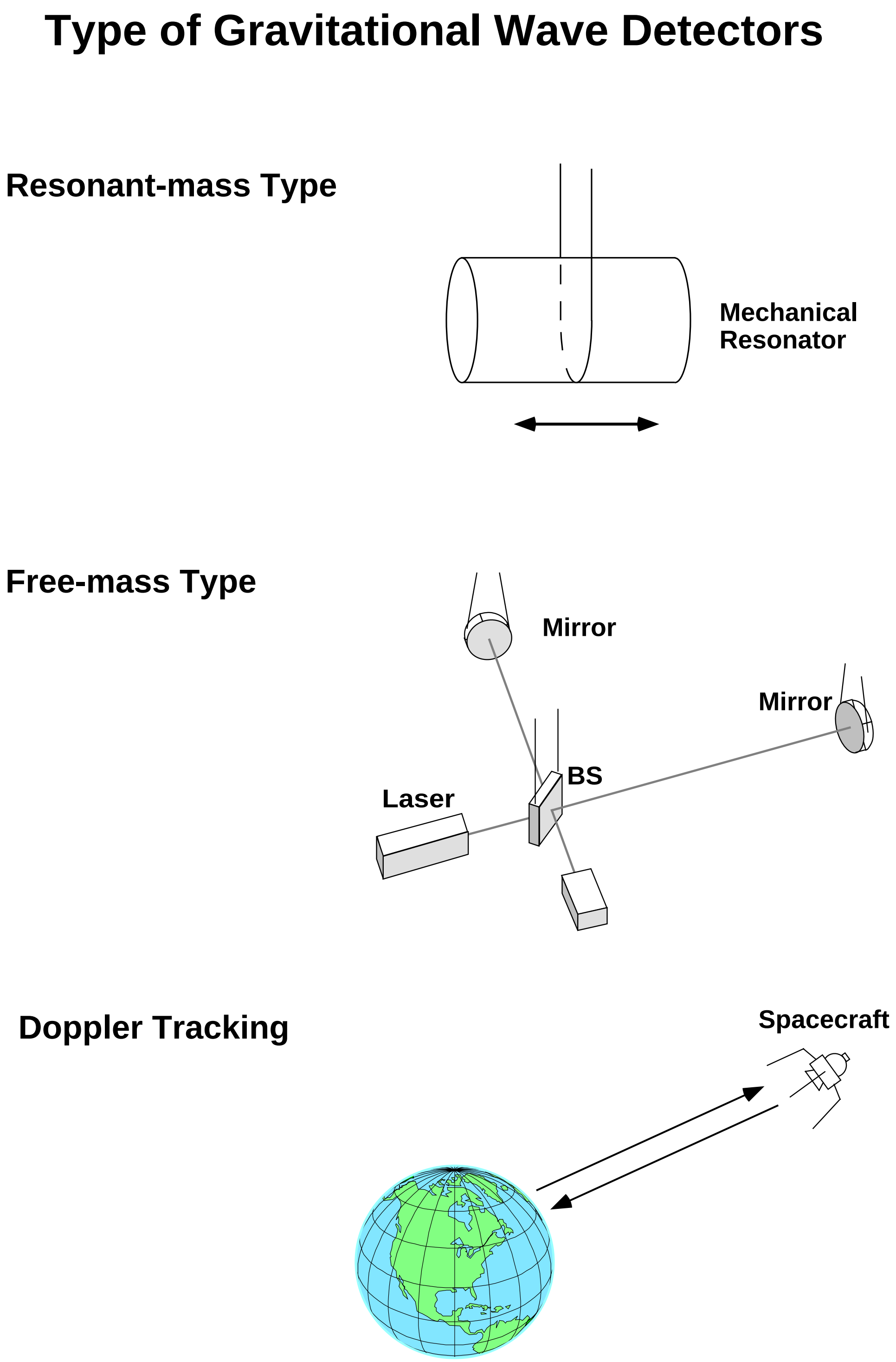

図 3: 様々な重力波検出法